

Math. P.

872

Math. 9th
87th

Colenso

<36626394850013

<36626394850013

Bayer. Staatsbibliothek

Elemente der Algebra

nebst

mehreren hundert Aufgaben

zum Gebrauch

in Real-, Fortbildungs- und gewerblichen Schulen,

von

Dr. J. W. Colenso.

Nach der fünfzehnten Auflage des englischen Originals für
deutsche Unterrichtszwecke bearbeitet

von

Georg Wolpert,

Reallehrer.



Stuttgart.

Verlag von Albert Koch.

1863.



Bayerische
Staatsbibliothek
München

V o r w o r t.

Auf die mathematischen Werke des Right Rev. J. W. Colenso, D. D. (Bishop of Natal) wurde der Bearbeiter zunächst aufmerksam durch das Bedürfniss, technischen Schülern und Examenskandidaten, denen zur Erlernung ihres Pensums in der Algebra häufig nur wenige Monate vergönnt sind, ein kurzes theoretisches und hinreichend praktisches Compendium anzupfehlen. Durch ein solches sollte das, wegen der Privatübung nothwendige und doch zeitraubende Dictiren vermieden, und zugleich den jungen Leuten nicht nur ein umfassendes Vademecum, sondern auch ein entschieden unterrichtendes Manuscript in die Hand gegeben werden. — Wir glauben, eine derartige, für den öffentlichen und den Selbstunterricht erprobte Schrift in Colenso's Elementar-Algebra (Elements of Algebra adapted for the use of national and adult

schools; containing numerous easy examples and questions under every rule, with a selection of miscellaneous exercises for practice) gewonnen zu haben, einem Werkchen, das vermöge seiner wissenschaftlichen und praktischen Tendenz in den — unsern Real-, Gewerbe- und Fortbildungsschulen parallelen — National- and Adult-Schools des industriellen Englands sich durch mehr als fünfzehn Auflagen eingebürgert hat.

Schon aus den übrigen stereotypirten, in den höheren Instituten und auf der Universität Cambridge mustergiltigen mathematischen Werken des Verfassers dürfte ein Schluss auf die Bedeutsamkeit und weite Verbreitung dieses kleineren Schriftchens gemacht werden. Der Text, die ihn näher erläuternden, gelösten Beispiele, sowie die besonderen Aufgaben sind auch in der That dem Standpunkte der Schüler unserer Klassen überaus angemessen, so dass es gewiss nicht ungerufen erscheint, dieses Werkchen für deutsche Verhältnisse hiemit einzuführen.

Wir treffen hier in synthetischer Form die einfacheren Probleme, wie sie für die obern Klassen der Real- und Fortbildungsschulen unumgänglich erforderlich sind; ferner sind dem Texte eine grosse Anzahl mannigfaltiger Aufgaben beigelegt, welche einerseits

dem Paragraphen als Commentar, anderseits zur gründlichen Repetition des einzelnen Kapitels dienen mögen. Die Beispiele sind desshalb stets Schritt vor Schritt aufgelöst; von den circa 500 Uebungsaufgaben sind die Resultate am Schluss des Werkes angegeben.

Ein weiterer Vorzug der Schrift dürfte auch darin bestehen, dass die leichtern Fälle einfacher Gleichungen und Textaufgaben (nach Schwierigkeit gruppirt) viel früher auftreten, als diess in sonstigen algebraischen Sammlungen der Fall ist; denn, fragt der Verfasser des Originals, was liegt denn für ein Grund vor, diese Partie, welche die meisten Schüler so sehr anregt und ihnen einen ungefähren Einblick in die praktischen Anwendungen der Wissenschaft verleiht, ihnen nicht so bald als möglich mundgerecht zu machen?

Am Schluss des §. 84 fügten wir, ausser den üblichen Methoden, eine in der höhern Geometrie benützte Praktik zur Lösung zweier Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten bei.

Was die sonstigen Eigenthümlichkeiten dieser Arbeit anbelangt, so wird schon das Inhaltsverzeichniss und noch mehr der verarbeitete, vielseitige Stoff zeigen, dass wir dadurch ein wohl zu beachtendes

Lehrmittel für den öffentlichen und Privatunterricht in der allgemeinen Arithmetik nutzbar zu machen gesucht haben.

Die höheren Abschnitte der Algebra, welche häufig erst in der sog. niedern Analysis abgehandelt werden, hat der Verfasser weiteren Blättern vorbehalten.

Möge sich das Büchlein auch in Deutschland ebenso viele Freunde, wie in seiner Heimath, erwerben!

Stuttgart, Weihnachten 1862.

Georg Wolpert.

Elementare Algebra

zum Gebrauch

in Real- und niederen technischen Schulen, sowie
zum Selbstunterricht.

Erstes Kapitel.

Erklärungen.

§. 1.

Algebra ist die Wissenschaft, welche über die Zahlengrössen mittelst alphabetischer Buchstaben und gewisser Vorzeichen und Zeichen handelt. Diese Lettern werden hiebei verwendet, sowohl um die Grössen selbst darzustellen, als auch die Art und Weise, auf welche sie mit andern verbunden sind.

So könnten wir z. B. a setzen, um 7 zu repräsentiren, dann würde 2mal a 14 vorstellen; oder wir könnten a wählen, um 3 zu repräsentiren, und dann würde zweimal a 6, dreimal a 9 vorstellen etc.

§. 2.

Das Vorzeichen $=$ (gleich) bedeutet, dass die Grössen, zwischen welchen es steht, einander gleich sind.

Z. B. wenn $a = 17$, dann ist zweimal $a = 34$.

§. 3.

Das Zeichen „ $>$ “ steht für „grösser als“, das Zeichen „ $<$ “ statt „kleiner als“.

Z. B. 10 ist grösser als 9 bezeichnet man kürzer mit $10 > 9$, oder auch $9 < 10$; wenn a grösser als b ist, so wird diess angedeutet $a > b$, oder auch $b < a$.

§. 4.

Das Vorzeichen $+$ (plus) spricht aus, dass die Grösse, vor welcher es steht, addirt wird, und das Vorzeichen $-$ (minus), dass die Grösse, vor der es steht, subtrahirt (weggenommen) wird.

Das heisst: $5 + 3 = 8$, $5 - 3 = 2$; und, wenn $a = 3$ und $b = 4$ ist, so folgt:

$$a + b = 3 + 4 = 7, \quad a + b + 2 = 3 + 4 + 2 = 9, \\ 10 - a = 10 - 3 = 7, \quad 10 - a - b = 10 - 3 - 4 = 7 - 4 = 3.$$

In dem letzten Beispiele könnten wir, da sowohl a als b subtrahirt werden muss, sie zusammen addiren, und dann ihre Summe subtrahiren, wie folgt:

$$10 - a - b = 10 - 3 - 4 = 10 - 7 = 3.$$

§. 5.

Alle Grössen, vor welchen $+$ steht, heisst man positive, und alle, vor welchen $-$ steht, heisst man negative Grössen.

Steht weder $+$ noch $-$ vor einer Grösse, so wird $+$ verstanden, und die Grösse ist positiv, das heisst a bedeutet $+ a$.

§. 6.

Das Vorzeichen $\times$ (mal) bedeutet, dass die Grössen, zwischen welchen es steht, mit einander multipliziert werden müssen; doch wird sehr oft ein Punkt statt des $\times$ benützt, oder noch häufiger wird die eine Grösse dicht neben die andere gesetzt, ohne irgend ein Vorzeichen zwischen denselben.

Also drücken $2 \times b$, $a \cdot b$, und ab alle dasselbe aus, nemlich a multipliziert mit b , und wenn daher $a = 3$ und $b = 4$ ist, werden wir haben $ab = 12$, $5a = 15$, $5ab = 60$; und ist ferner $c = 5$, $d = 0$, dann ist:

$$4ab + 3ac + 4d - 2b + 2abc - 3abcd \\ = 48 + 45 + 0 - 8 + 120 - 0 = 213 - 8 = 205.$$

§. 7.

Die Zahl (gleichviel ob positiv oder negativ), welche irgend einer algebraischen Grösse vorsteht, heisst ihr Coefficient; so ist 3 der Coefficient von $3a$, — 7 von $-7ax$ etc.

Ist keine Zahl vorhanden, so ist der hiebei gedachte Coefficient 1, da a einmal a bedeutet.

Uebungsbeispiele I.

Wenn $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 0$ ist, so sollen die Zahlenwerthe von folgenden Ausdrücken gefunden werden:

- 1) $a + 2b + 3c + 4d + 5e$.
- 2) $3a - b + 2c - d + e$.
- 3) $-3a + 2b - c + 2d - 3e$.
- 4) $-a + 3b + 2c - 3d + e$.
- 5) $ab + 2bc + 3cd + 4de$.
- 6) $ac - bd + ce - abc$.
- 7) $abc - bcd - cde + abcd$.
- 8) $abd - 2bce + acd - 2bde + bcd$.

§. 8.

Das Vorzeichen : (durch) meldet, dass die vor ihm stehende Grösse durch die nach ihm stehende dividirt werden soll. Jedoch wird sehr häufig, um die Division auszudrücken, die zu dividirende Grösse über die andere geschrieben, mit einem Striche zwischen beiden, in Form eines Bruches.

So bezeichnen $a : b$ und $\frac{a}{b}$, jedes von ihnen, a dividirt durch b ; und wenn $a = 2$, $b = 3$ ist, dann ist:

$$\frac{5a}{2b} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad \frac{3a + 2b}{2b - a} = \frac{6 + 6}{6 - 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

§. 9.

Wird irgend eine Grösse mit sich selbst beliebig vielmals multipliziert, so wird das Produkt eine Potenz der Grösse genannt. Man drückt diess kurz aus, indem man die Grösse niederschreibt mit einer

kleinen Ziffer rechts oben, welche angibt, wie vielmals die Grösse wiederholt wird.

Z. B. a^5 steht für $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, $3a^4b^3c^2d$ für $3aaaaabbbcccd$.

Die kleine Ziffer oben heisst der Exponent der entsprechenden Potenz.

Z. B. a (welches a^1 bedeutet) ist die erste Potenz von a ,
 a^2 ist die zweite Potenz oder das Quadrat von a ,
 a^3 „ dritte „ oder Cubus von a ,
 a^4 „ vierte „ von a , etc.

Die kleinen Ziffern, 2, 3, 4, etc. sind beziehungsweise die Exponenten der 2ten, 3ten, 4ten etc. Potenzen von a . Hieraus folgt,

wenn $a = 2$, so ist $a^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$,

„ $a = 3$, „ $a^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$,

„ $a = 1$, „ $a^2 = 1$, $a^3 = 1$, $a^4 = 1$, etc.

Uebungsbeispiele II.

Wenn $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 5$, die Werthe zu finden von:

$$1) \frac{a}{b} + \frac{2b + c}{d} + \frac{b + d}{c}, \quad 2) \frac{ac}{d} + \frac{bd}{c + 2} + \frac{cd}{c - 2},$$

$$3) a^2 - b^2 - c^2 + d^2, \quad 4) a^3 - b^3 + c^3 - bcd,$$

$$5) ab^2 - 3bc^2 + cd^2, \quad 6) b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2,$$

$$7) b^4 + 2b^2c^2 + c^4, \quad 8) c^4 - 2c^2d^2 + d^4.$$

§. 10.

Die Quadratwurzel einer Grösse ist die Grösse, welche in's Quadrat erhoben, der gegebenen Grösse gleich ist.

So ist 3 die Quadratwurzel von 9, da $3^2 = 9$; die Quadratwurzel von a^2 ist a , und die von 64 ist 8.

Ebenso ist die dritte, vierte etc. Wurzel einer Grösse diejenige Zahl, deren 3te, 4te u. s. w. Potenz der gegebenen Grösse gleich ist.

Um eine Wurzel anzudeuten, ist das übliche Zeichen $\sqrt{}$, welches nebst dem entsprechenden Exponenten (auf der linken Seite desselben) vor die Grösse gesetzt wird, um deren Wurzel es sich handelt.

So ist $\sqrt[2]{a^2} = a$, $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[2]{1} = 1$, $\sqrt[3]{1} = 1$, etc.

Jedoch wird der Exponent gewöhnlich beim Schreiben der Quadratwurzel weggelassen; so wird $\sqrt{x}$ anstatt $\sqrt[2]{x}$ geschrieben.

Uebungsbeispiele III.

Die Werthe zu finden von:

$$1) \sqrt{4} - 2\sqrt{9} + 3\sqrt{16}. \quad 2) 3\sqrt{25} - 2\sqrt{36} + \sqrt{49}.$$

$$3) \sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{125}. \quad 4) \sqrt{64} - 2\sqrt[3]{64} + 3\sqrt[4]{16}.$$

Wenn $a = 1$, $b = 9$, $c = 4$, $d = 25$ ist, so finde die Werthe von:

$$5) 2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt{c}. \quad 6) \sqrt{b} - 2\sqrt{c} + \sqrt{d}.$$

$$7) \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} + 4\sqrt{d}. \quad 8) 4\sqrt{a} - 3\sqrt{b} + 2\sqrt{c} - \sqrt{d}.$$

§. 11.

Algebraische Grössen heissen **gleichartig** (gleichnamig) oder **ungleichartig**, je nachdem sie dieselben oder verschiedene Buchstabenverbindungen enthalten.

Z. B. a und $5a$, $-5a^3b$ und $7a^3b$, $3a^2bc$ und $-a^2bc$, sind Paare von gleichartigen Grössen; a^3 und a^2 , $3ab$ und $-7a$, $3a^2b$ und $3ab^2$ Paare von ungleichartigen Grössen.

§. 12.

Klammern (Parenthesen), $()$, $\{\}$, $[\]$, benützt man, um zu zeigen, dass alle Grössen innerhalb derselben behandelt werden müssen, wie wenn sie nur Eine Grösse bildeten. Es ist von grosser Wichtigkeit, pünktlich den Erfolg ihrer Anwendung zu beachten.

So ist $a - (b - c)$ nicht dasselbe wie $a - b - c$; denn im letztern Falle wird sowohl b als auch c subtrahirt, wogegen im ersten nur die Grösse $b - c$ subtrahirt wird.

Daher, wenn $a = 4$, $b = 3$, $c = 1$, haben wir:

$$a - b - c = 4 - 3 - 1 = 0, \quad a - (b - c) = 4 - 2 = 2;$$

$$2a - 3b + 2c = 8 - 9 + 2 = 1,$$

$$2a - (3b + 2c) = 8 - 11 = -3;$$

$$2a + b - c = 8 + 3 - 1 = 10,$$

$$2(a + b) - c = 14 - 1 = 13,$$

$$2(a + b - c) = 12.$$

Manchmal benützt man statt der Klammern einen Bogen, der Bindestrich genannt und über die zu einander gehörigen Grössen gezogen wird; so ist

$a - \overbrace{b - c}$ dasselbe wie $a - (b - c)$.

Die Linie, welche den Zähler und den Nenner eines Bruchs trennt, ist auch eine Art Bindestrich, da er in der That bei der Division das bedeutet, was die Klammer bei der Multiplication.

So spricht $\frac{a + b - c}{4}$ aus, dass die Gesamtgrösse $a + b - c$ durch 4 dividirt werden soll, und könnte $\frac{1}{4} (a + b - c)$ geschrieben worden sein.

Uebungsbeispiele IV.

Wenn $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 0$, die Werthe zu finden von:

- 1) $(a + b - c)^2 + (a + b - c^2) + a + (b - c)^2$.
- 2) $(a - b - c)^2 + (a - b - c^2) + a - (b - c)^2$.
- 3) $[a - (b - c)]^2 + \sqrt{2a^2 - 3(b^2 - c^2)} + \sqrt[3]{a^2 - (b - c)^2}$.
- 4) $\sqrt{a + b - c} + \sqrt[3]{2a + b} + \sqrt[4]{3(a + b) + c}$.

Wenn $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$ ist, zu zeigen, dass die Zahlenwerthe gleich sind:

- 5) Von $a^3 - b^3$ und $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
- 6) „ $a^4 - b^4$ und $(b + c)(b - c)(b^2 + c^2)$,
- 7) „ $a^4 + a^2 b^2 + b^4$ und $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$,
- 8) „ $b^4 + 4c^4$ und $[b^2 + 2(b + c)c][b^2 - 2(b - c)c]$.

§. 13.

Diejenigen Theile eines Ausdruckes, welche durch die Vorzeichen $+$ oder $-$ zusammenhängen, d. h. welche durch Addition oder Subtraction verbunden sind, heissen seine Glieder, Posten; von dem Ausdruck selbst sagt man, er sei einfach oder zusammengesetzt, je nachdem er Eines oder mehr Glieder (Posten) enthält.

So sind a^2 , $2ab$, und $-3b^2$ jedes einfache Grössen, und $a^2 + 2ab - 3b^2$ ist eine zusammengesetzte Grösse, deren Glieder a^2 , $+2ab$, $-3b^2$ sind.

Diejenigen Theile eines Ausdrucks, welche durch Multiplication verbunden sind, heissen seine Faktoren.

Z. B. die Faktoren von $2ab$ sind 2, a , und b , und diejenigen von $-3b^2$ sind -3 , b , und b , oder wie wir vielmehr sagen sollten, -3 und b^2 , da es nicht gebräuchlich ist (ausser, wenn es besonders zu irgend einem Zweck erforderlich ist), eine Potenz in ihre Grundfaktoren zu zerlegen.

Es ist sehr nöthig, dass der Schüler auf Einen Schlag zwischen Gliedern und Faktoren wohl unterscheiden lerne.

So ist $2a + b - c$ eine zusammengesetzte Grösse von drei Gliedern, $2a$, b , und $-c$; $2(a + b) - c$ ist eine von nur zwei Gliedern, $2(a + b)$ und $-c$, dessen erstes, $2(a + b)$, aus zwei Faktoren, 2 und $a + b$ besteht, der Faktor $a + b$ selbst ist eine zusammengesetzte Grösse von zwei Gliedern.

Es ist unwesentlich, in welcher Ordnung sowohl die Glieder als auch die Faktoren einer Grösse aufgestellt sind. Gewöhnlich stellt man jedoch die Grössen wo möglich in alphabetischer Ordnung.

So ist $a - 2b + 3c$ dieselbe Grösse wie $-2b + a + 3c$ oder wie $3c - 2b + a$, etc., und abc ist dasselbe wie bac oder bca ; aber man schreibt beziehungsweise lieber $a - 2b + 3c$, und abc , wofern nicht irgend welche Gründe vorhanden wären, anders zu ordnen.

Eine Grösse von Einem Glied heisst ein Monom (eingliedrig), von zwei Gliedern, ein Binom, von drei ein Trinom etc., und im Allgemeinen wird eine Grösse von mehr als zwei Gliedern ein Polynom genannt.

Zweites Kapitel.**Addition, Subtraction, Multiplication,
Division.****§. 14.**

Um gleichartige algebraische Grössen zu addiren, addire man je für sich die positiven und die negativen Coefficienten, nehme den Unterschied dieser zwei Summen, setze das Vorzeichen der grössern vor, und schreibe die gemeinsamen Buchstaben daneben.

Beisp. 1.	$3a$	Beisp. 2.	$-12bc$	Beisp. 3.	$3a^2 + 2b^2$
	$-5a$		$4bc$		$4a^2 - 3b^2$
	$-2a$		$3bc$		$-8a^2 + 4b^2$
	$5a$		$-8bc$		$5a^2 - 6b^2$
	$6a$		$5bc$		$7a^2 + 3b^2$
	$7a$		$-8bc$		$11a^2 \quad *$

In dem letztern Beispiel dient der Stern dazu, um anzudeuten, dass die Ausdrücke mit b^2 einander aufheben.

Wenn die Grössen ungleichartig sind, müssen wir die etwaigen gleichartigen nach der vorhergehenden Regel addiren, und die übrigen mit ihren zugehörigen Vorzeichen niederschreiben.

Beisp. 4.	$x - 2y + 3z$	Beisp. 5.	$2a + c + d$
	$-2x + 3y - 4z$		$-b + a + e$
	$3x - 5y - 5z$		$+c - d$
	$x + y$		$-3a - e - f$
	$2y + 2z$		$-2c + 2d - 2e$
	$3x - y - 4z$		$-b + 2d - 2e - f$

Uebungsbeispiele V.

Die Summe zu finden von:

- 1) $2a - 3b + 4c - 5$, $-a + 2b - 3c + 2$, $2b + 2c + 3$.
- 2) $2x - 3y + 4z - 4$, $-3x + 2y - 5z + 7$, $x + 2y + 3z$.
- 3) $a^2 - 2ac + 3c^2$, $-3a^2 + 4ac - 2c^2$, $5a^2 - 3ac + c^2$.
- 4) $5ax + 2by + 3cx$, $ax - 3by + 2cz$, $-4ax + by - cz$.
- 5) $7x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - y^3$, $-5x^3 - 3x^2y + xy^2 + 7y^3$,
 $-3x^3 + x^2y - 7xy^2 - 5y^3$, $x^3 + 7x^2y + 5xy^2 - 3y^3$.

$$6) \quad 2h^2 - 3hk - 4k^2, \quad 3hl + 2k^2 - l^2, \quad h^2 - 2kl + 5l^2, \\ 3hk - 6hl - 3h^2, \quad 3hl - 2l^2 + 5kl, \quad 4k^2 - 3kl + 2h^2.$$

§. 15.

Um algebraische Grössen abzuziehen, wechsle ihre Vorzeichen und verfähre wie bei der Addition.

So wird, wenn wir b von a wegnehmen, das Resultat $a - b$ sein, aber, wenn wir $b - c$ von a wegnehmen, wird das Resultat um c grösser als das erste, da ja diessmal die abzuziehende Grösse um c kleiner ist als im ersten Falle; daher wird das gesuchte Resultat $a - b + c$ sein, wobei aus den Grössen $b, -c$, beziehungsweise zu $-b, +c$ geworden ist.

Oder wir können folgendermassen schliessen:

(1) Da $a = a - b + b$, so ist, wenn wir $+b$ von a wegnehmen, das Resultat $a - b$, gerade so, wie wenn wir $-b$ hinzu addiren.

(2) Da $a = a + b - b$, so ist, wenn wir $-b$ von a wegnehmen, das Resultat $a + b$, gerade so, wie wenn wir $+b$ dazu addiren.

Es wird jedoch oft nicht geradezu nöthig sein, die obige Regel vom Zeichenwechsel anzuwenden; die Differenz kann auf einmal erhalten werden, indem man die der Coefficienten nimmt und die gemeinschaftlichen Buchstaben anfügt.

	Beisp. 1.	Beisp. 2.
Von	$5x + 7y - 8z$	$5x^2 - 2xy + 3y^2$
nehme man weg	$3x + y - 4z$	$4x^2 - 2xy + 7y^2$
	$\text{Antw. } 2x + by - 4z$	$9x^2 \quad - 4y^2$

Beisp. 3.
Von
nehme man weg
$4a^2 + 4ab - 8b^2 + c^2$

Uebungsbeispiele VI.

- 1) Von $3a - 2b + c$ ist wegzunehmen $a + 2b - c$.
- 2) „ $2m^2 - 3mn + n^2$ „ $- 2m^2 + 3mn - n^2$.

- 3) Von $5ax - 3by + cz$ ist wegzunehmen $ax - 2by + 3cz$.
 4) „ $-7x^2 - 5x + 3$ „ $3x^2 + 5x - 7$.
 5) „ $5a^4 - 4a^3b + 3a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$ wegzunehmen $-2a^4 + 3a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 6b^4$.
 6) „ $x^2 - 2xy + 4y^2 - 3xz - 5yz + 2z^2$ nehme man weg $3y^2 + xz - 2yz + 3x^2 - z^2 + 2xy$.

§. 16.

Da das Vorzeichen $+$ oder $-$, wenn es einer Klammer vorsteht, ausspricht (§. 15), dass die eingeschlossene Gesamtgrösse zu addiren oder zu subtrahiren ist, so müssen wir, um die Klammer zu entfernen, wirklich die durch das Vorzeichen angedeutete Operation ausführen, d. h. wir müssen die fragliche Grösse addiren oder subtrahiren. Wenn nun $(+)$ vor der Klammer steht, so heisst diess nichts weiter, als die Glieder innerhalb der Klammer mit ihren eigenen Vorzeichen hinschreiben, weil beim Addiren einer Grösse die Vorzeichen ihrer Glieder nicht verändert werden. Wenn aber $(-)$ vor der Klammer steht, so werden wir einen Zeichenwechsel für alle Glieder innerhalb der Klammer haben, indem sie alle subtrahirt werden müssen.

$$\text{Man hat also: } + (a + b - c) = a + b - c,$$

$$(a^2 - 2ab - b^2) = a^2 - 2ab - b^2;$$

$$\text{hingegen } - (a + b - c) = -a - b + c,$$

$$- (a^2 - 2ab - b^2) = -a^2 + 2ab + b^2.$$

Ferner haben wir auch beim Auftreten einer doppelten Klammer

$$3a - [(a - 3c) - (2b - c)] =$$

$$3a - (a - 3c) + 2b - c =$$

$$3a - a + 3c + 2b - c = 2a + 2b + 2c.$$

Uebungsbeispiele VII.

Auf ihre einfachsten Formen zurückzuführen (zu reduciren):

- 1) $(a - b) - (b - 3c) + (b - 2c) - (a - b + c)$.
- 2) $a^2 - (b^2 - c^2) + [a^2 - (b^2 + c^2)] - [a^2 - (b^2 - c^2)]$.
- 3) $x - (2 - 3x) - [1 - (x - 2)] - [2 - (x - 1)]$.

- 4) $— [x^2 — (y^2 — z^2)] — [y^2 — (x^2 — z^2)] — [z^2 — (x^2 — y^2)]$.
 5) $[2h — (k — 3l)] — [2k — (3h — l)] — [2l — (3k — h)]$.
 6) $[3a — (b — c — d)] — [a — (b — c) — d] — [(a — b) — (c — d)]$.

§. 17.

Oft ist es wünschenswerth, nicht nur in Klammern sich befindliche Grössen aufzuschliessen oder aufzulösen, sondern auch derartige Grössen zu bilden, d. h. beliebige gegebene Glieder eines Ausdrucks in eine Klammer zu fassen. Hiebei ist nun zu bemerken, dass, welches Glied wir auch als das erste Glied innerhalb der Klammer setzen wollen, das Vorzeichen jenes Gliedes vor die Klammer gesetzt werden muss, und dieses Vorzeichen wird selbstverständlich alle Glieder, die wir in die Klammer hinein bringen mögen, beeinflussen. Hätte man nun das Vorzeichen (+), so dürfen die übrigen Glieder ohne Weiteres in die Klammer hinein mit ihren eigenen Vorzeichen gebracht werden. Sollte es aber (—) sein, so werden wir bei allen übrigen Glieder die Vorzeichen wechseln müssen und sie hierauf in die Klammer setzen; denn das Vorzeichen (—), welches der Klammer vorsteht, wird alle diese Vorzeichen beeinflussen und gleichsam die vorgenommenen Wechsel corrigiren, so dass die ursprünglichen Vorzeichen zum Vorschein kommen, sobald wir die Klammer wieder auflösen.

So wird z. B. $+ a — b — c$, in eine Klammer gefasst, mit $+ a$ als erstem Gliede, gleich $+(a — b — c)$ sein; ist aber $— b$ das erste Glied, so kommt $— (b — a + c)$, und mit $— c$ als erstem Glied, kommt $— (c — a + b)$; wenn wir nun diese letzteren zwei Klammern wieder auflösen, so wird das (—) Zeichen, welches jeder Klammer vorausgeht, die Wechsel, welche wir gemacht haben, corrigiren, und die Grössen werden wieder so dastehen, wie anfangs, $— b + a — c$, $— c + a — b$.

Ebenso könnten wir auch eine innere Klammer anbringen und den Ausdruck so schreiben: $+(a — (b — c))$, oder $+(a — (b + c))$, oder $— ((b — a) + c)$, oder $— [b — (a — c)]$, u. s. w.

Uebungsbeispiele VIII.

In Klammern auszudrücken, indem man die Glieder, (1) je 2 zusammen, (2) je 3 zusammen fasst.

- 1) $a - 2b + 3c - d + 2e - f$. 2) $- 2b + 3c - d + 2e - f + a$.
 3) $3c - d + 2e - f + a - 2b$. 4) $- d + 2e - f + a - 2b + 3c$.
 5) $2e - f + a - 2b + 3c - d$. 6) $- f + a - 2b + 3c - d + 2e$.

§. 18.

Bisher haben wir nur von Zahlen-Coefficienten gesprochen; wenn aber eine Grösse aus zwei oder mehr Faktoren besteht, so ist jeder einzelne von ihnen ein Coefficient der übrigen mit einander, d. h. (wie das Wort Coefficient andeutet), er, als Faktor, macht mit ihnen die fragliche Grösse aus.

Z. B. in $3abcx$ ist 3, wie sonst, der Coefficient von $abcx$; aber auch $3a$ ist der Coefficient von bcx , $3ab$ der von cx , ax der von $3bc$, u. s. w.

Solche Coefficienten nennt man Buchstaben-Coefficienten, da sie algebraische Buchstaben enthalten; und wenn beliebige Glieder eines Ausdrucks irgend einen gemeinschaftlichen Faktoren enthalten, so wird oft eine Klammer dazu benützt, die andern Faktoren, welche als dessen Buchstabencoefficienten angesehen werden, in Einen Ausdruck zu sammeln, welcher vor oder hinter den gemeinschaftlichen Faktor gesetzt wird.

Z. B. gerade wie $3x + 2x - x = 4x$, d. h. $= (3 + 2 - 1)x$;

ist gleichfalls $ax + bx - x = (a + b - 1)x$;

$$2a - 4ax + bay = 2a(1 - 2x + 3y),$$

$$(a + 2b)x^2 - (2b - c)x^2 = [(a + 2b) - (2b - 1)]x^2 = (a + c)x^2.$$

Beispiel 1. Addire: $(a - 2p)x^2 + (2c - 3r)x$

$$\begin{array}{r} (2p + a)x^2 \qquad \qquad - x \\ - (p - a)x^2 - (c - 1)x \\ \qquad \qquad \qquad - x^2 - (c - 2r)x \end{array}$$

$$\text{Antw. } (3a - p - 1)x^2 \qquad \qquad - rx$$

Beispiel 2. Von $ax^3 - bx^2 + x$

nehme weg $- px^3 - qx^2 + rx$

$$\text{Antw. } (a + p)x^3 - (b - q)x^2 + (1 - r)x$$

Wenn hingegen eine Klammer in dieser Weise vor oder nach einem einfachen Glied als Faktor zu stehen kommt, so kann sie aufgelöst werden, nachdem man jedes einzelne Glied des Ausdrucks innerhalb derselben mit dem gemeinsamen Faktor multipliziert hat.

$$\begin{aligned} \text{So ist } a(b - x) - (a - y)b &= (ab - ax) - (ab - by) \\ &= ab - ax - ab + by = by - ax = -(ax - by). \end{aligned}$$

Uebungsbeispiele IX.

1) Die Coefficienten herauszusetzen in

$$lx^3 + mx^2 - nx - mx^3 - nx^2 - lx - nx^3 - lx^2 - mx.$$

2) Zusammen zu fassen

$$(a - b)x + (b - c)y \text{ und } (a + b)x - (b + c)y.$$

3) Subtrahire den ersten Ausdruck vom letztern in (2).

4) Die Coefficienten herauszusetzen in

$$[ax^2 - (bx - c)] - [bx^2 - (cx - a)] + [cx^2 - (ax - b)].$$

5) Addire zu einander

$$-(2a - 3c)x + (b - 2a)y \text{ und } -(3c - a)x + (b - a)y.$$

6) Subtrahire in (5) den letztern Ausdruck von dem erstern.

§. 19.

Um zwei einfache algebraische Grössen mit einander zu multiplizieren, so multiplizire man mit einander beziehungsweise die Coefficienten und Buchstaben; haben hiebei der Multiplikator und der Multiplicand dasselbe Vorzeichen, so setze man diesem Produkt das Vorzeichen $+$, haben sie verschiedene Vorzeichen, das Zeichen $-$ vor.

$$\begin{aligned} \text{So ist } 7a \times 4b &= 28ab, \quad -2a \times 3c = -6ac, \quad 5b \\ \times -2c &= -10bc, \quad -3a \times -5b = 15ab. \end{aligned}$$

Diese Regel für das Vorzeichen des Produktes, nemlich: gleiche Vorzeichen liefern $+$, und ungleiche $-$, kann abgeleitet werden wie folgt:

(1) $+$ b mit $+$ a multiplizieren, ist dasselbe wie $+$ b , a mal addiren, oder $+$ ab addiren, daher bleibt das Vorzeichen des Produkts $(+)$.

(2) $+ b$ mit $- a$ multiplizieren, heisst $+ b$, a mal wegnehmen oder $+ a b$ subtrahiren; daher wird das Vorzeichen des Produkts $(-)$.

(3) $- b$ mit $+ a$ multiplizieren, ist dasselbe wie $- b$, a mal addiren, oder $- a b$ addiren; daher bleibt das Vorzeichen des Produkts $(-)$.

(4) $- b$ mit $- a$ multiplizieren, heisst $- b$, a mal subtrahiren, oder $- a b$ subtrahiren; daher wird das Vorzeichen des Produkts $(+)$.

Wenn mehrere einfache Grössen mit einander multipliziert werden sollen, so wird, anstatt sie zusammen nach einander der obigen Regel gemäss zu multiplizieren (nemlich $2a \times -3b \times -4c = -6ab \times -4c = 24abc$), es kürzer sein, sie mit einander auf einmal zu multiplizieren, und dann diesem Produkt das Vorzeichen $+$ oder $-$ vorzusetzen, je nachdem die Anzahl der negativen Faktoren eine gerade oder ungerade ist.

§. 20.

Potenzen derselben Grösse (Grundzahl) werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addirt.

Es ist nemlich $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$; denn $a^3 = a \cdot a \cdot a$, $a^2 = a \cdot a$, folglich $a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$; und ebenso ist es in den übrigen Fällen.

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} -3a^2b \times 4a^3b^2 \times -2a^2b^3 &= 24a^7b^6 \\ 2abc \times 3a^2b^2c^2 \times -ab^2c^3 &= -6a^4b^5c^6. \end{aligned}$$

§. 21.

Wenn der Multiplikator oder der Multiplikand aus mehreren Gliedern bestehen, so muss jedes Glied des letztern mit jedem Glied des erstern multipliziert, und die Summe aller dieser Produkte als vollständiges Produkt der 2 Grössen genommen werden.

Dieses Verfahren wird gewöhnlich wie in den folgenden Beispielen gehandhabt.

$$\text{Beisp. 1. } \begin{array}{r} 3x^2 - 2xy + 4y^2 \\ 2a^2x \end{array}$$

$$\hline 6a^2x^3 - 4a^2x^2y + 8a^2xy^2.$$

$$\text{Beisp. 2. } \begin{array}{r} - 2a^2b^2 + 5ab^3 - 7b^4 \\ - 4ab \end{array}$$

$$\hline 8a^3b^3 - 20a^2b^4 + 28ab^5.$$

Beisp. 3.

$$a + b$$

$$a + b$$

$$\hline a^2 + ab$$

$$+ ab + b^2$$

$$\hline a^2 + 2ab + b^2$$

Beisp. 4.

$$a + b$$

$$a - b$$

$$\hline a^2 + ab$$

$$- ab - b^2$$

$$\hline a^2 - b^2$$

Beisp. 5.

$$a - b$$

$$a - a$$

$$\hline a^2 - ab$$

$$- ab + b^2$$

$$\hline a^2 - 2ab + b^2$$

Uebungsbeispiele X.

- 1) Multipliziere ax^2y^3 mit bxy ; mx^2 mit $-nx^3$; $-acx$ mit $-2axy$; abc mit bc ; $-abc$ mit $-ac$; x^2y mit $-xy^2$.
- 2) „ $x^2 - xy + y^2$ mit x , und $a^2 - ax + x^2$ mit $-ax$.
- 3) „ $2a + x$ mit $a + 3x$.
- 4) „ $x^2 + 3x - 2$ mit $x + 3$.
- 5) „ $x^2 - 4x + 3$ mit $x - 2$.
- 6) „ $a^2 + 2ab + 3b^2$ mit $a^2 - 2ab + b^2$.
- 7) „ $9x^2 - 3xy + y^2 - 6x - 2y + 4$ mit $3x + y + 2$.
- 8) „ $a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc$ mit $a - b + c$.
- 9) „ $m^3 + 2m^2 + 2m + 1$ mit $m^3 - 2m^2 + 2m - 1$.
- 10) „ $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 2xy + 3xz - 6yz$ mit $x - 2y - 3z$.

§. 22.

Der Schüler sollte einige Resultate der Multiplikation sich besonders merken, um im Stande zu sein, wenn ähnliche Fälle vorkommen, solche anzuwenden und auf einen Schlag die entsprechenden Produkte niederzuschreiben.

Zum Beispiel (§. 21, Beisp. 3, 5) das Produkt von $a + b$ mit $a + b$, oder das Quadrat von $a + b$, ist $a^2 + 2ab + b^2$.

und das Quadrat von $a - b$ ist $a^2 - 2ab + b^2$; wenn wir uns diese Resultate einprägen, so können wir auf einmal das Quadrat irgend eines andern Binoms ansetzen; z. B.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2.$$

Ferner (in Beisp. 4) ist das Produkt von $a + b$ mit $a - b$ $a^2 - b^2$; hieraus ergibt sich $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$; $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$; $(2ax + 3by)(2ax - 3by) = 4a^2x^2 - 9b^2y^2$.

Es mögen daher diese beiden Resultate oder Formeln hiemit so gegeben werden:

$$(1) \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

oder, das Quadrat irgend eines Binoms ist gleich der Summe der Quadrate seiner zwei Glieder nebst ihrem doppelten Produkt;

$$(2) \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

oder, das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier beliebigen Grössen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Uebungsbeispiele XI.

- 1) Niederschreiben die Quadrate von $x - y$, $1 + 2a$, $a - 3$.
- 2) „ „ „ „ „ $a - 2b$, $2 + a^2$, $2a - 3b$.
- 3) Die Werthe anzugeben von
 $(a + 2c)(a - 2c)$, $(2a + c)(2a - c)$, $(a^2 + 2b^2)(a^2 - 2b^2)$.
- 4) Die auf einander folgenden Produkte zu finden von
 $x + a$, $x - a$, und $x^2 + a^2$.
- 5) Zu vereinfachen $(2a - b)^2 + 2(a - 2b)(a + 2b)$.
- 6) „ „ $(3x + y)(3x - y) - (y - 3x)^2$.
- 7) „ „ $(a - 2x)^2 - 2(a - x)^2 + (2a + x)^2$.
- 8) „ „ $(3a - x)^2 - (2a - 3x)(2a + 3x) - (a - 3x)^2$.

§. 23.

Um eine einfache algebraische Grösse durch eine andere zu dividiren, dividire man beziehungsweise die Coefficienten und die Buchstaben des Dividirenden durch diejenigen des Divisors. Wenn dann die zwei Grössen dasselbe Vorzeichen haben, so setze

man vor dem so erhaltenen Quotienten das Vorzeichen $+$, oder, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben, das Zeichen $-$.

Es ist also:

$$14ab : 2a = \frac{14ab}{2a} = 7b; \quad -12a : 10c = -\frac{12a}{10c} = -\frac{6a}{5c};$$

$$-a : -2c = +\frac{a}{2c}.$$

Die Regel für das Vorzeichen des Quotienten ist dieselbe wie die in §. 19 aufgestellte, nemlich: gleiche Vorzeichen liefern $+$, und ungleiche $-$, und wird leicht von dort abgeleitet; denn wenn $+a$, multipliziert mit $-b$, $-ab$ liefert, so liefert $-ab$ dividirt durch $+a$ alsdann $-b$; und ebenso in den übrigen Fällen.

§. 24.

Eine Potenz einer Grösse wird durch eine andere derselben Grösse dividirt, indem man den Exponenten der letztern von dem der erstern subtrahirt.

Das heisst: $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$; denn $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a^3 \cdot a^2}{a^3} = a^2$;

ebenso $\frac{x^3 y^2 z^3}{x y z} = x^2 y z^2$.

§. 25.

Enthält der Dividend mehrere Glieder, während der Divisor nur aus einem einzigen besteht, so muss jedes einzelne Glied des erstern durch den letztern dividirt werden.

Beisp. 1.

$$\frac{x^3 y - 3x^2 y^3 + 9y^2}{3xy} = \frac{x^3 y}{3xy} - \frac{3x^2 y^3}{3xy} + \frac{9y^2}{3xy} = \frac{x^2}{3} - xy^2 + \frac{3y}{x}.$$

Beisp. 2.

$$\frac{a^2 c^2 - 2abc^2 + 3ac^3}{-4abc^2} = -\frac{a^2 c^2}{4abc^2} + \frac{2abc^2}{4abc^2} - \frac{3ac^3}{4abc^2}$$

$$= -\frac{a}{4b} + \frac{1}{2} - \frac{3c}{4b}.$$

§. 26.

Ist aber der Divisor auch eine algebraische Summe, so müssen wir, wie in der Arithmetik, in folgender Weise verfahren:

(1) Placire die Ausdrücke, wie bei der Division mit Zahlen, ordne die einzelnen Glieder eines jeden, so dass die verschiedenen Potenzen eines und desselben Buchstabens, der in beiden gemeinschaftlich vorkommt, nach der Höhe seines Exponenten auf einander folgen (es ist einerlei, ob in steigender oder fallender Ordnung, nur soll es in derselben Ordnung bei beiden geschehen).

(2) Dividire das erste Glied des Dividenden durch das des Divisors, und schreibe das Resultat in den Quotienten.

(3) Multiplizire den gesammten Divisor mit dem ersten Glied des Quotienten, und subtrahire das Produkt von dem Dividenden.

(4) Setze aus dem Dividenden neue Glieder herab (so viel als erforderlich sein mögen), und wiederhole die ganze Operation.

Beisp. 1.

$$\begin{array}{r}
 1 - x \mid 1 - 2x + x^2 \mid 1 - x \\
 \underline{1 - x} \\
 - x + x^2 \\
 - x + x^2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Beisp. 2.

$$\begin{array}{r}
 3x - 4y \mid 6x^3 - 17x^2y + 16y^3 \mid 2x^2 - 3xy - 4y^2 \\
 \underline{6x^3 - 8x^2y} \\
 - 9x^2y + 16y^3 \\
 - 9x^2y + 12xy^2 \\
 \hline
 - 12xy^2 + 16y^3 \\
 - 12xy^2 + 16y^3 \\
 \hline
 \end{array}$$

Beisp. 3.

$$\begin{array}{r}
 a - x \mid a^3 - x^3 \mid a^2 + ax + x^2 \\
 \underline{a^3 - a^2x} \\
 a^2x - x^3 \\
 \underline{a^2x - ax^2} \\
 ax^2 - x^3 \\
 \underline{ax^2 - x^3} \\
 0
 \end{array}$$

Beisp. 4.

$$\begin{array}{r}
 a + x \mid a^3 + x^3 \mid a^2 - ax + x^2 \\
 \underline{a^3 + a^2x} \\
 -a^2x + x^3 \\
 \underline{-a^2x - ax^2} \\
 ax^2 + x^3 \\
 \underline{ax^2 + x^3} \\
 0
 \end{array}$$

Uebungsbeispiele XII.

- 1) Dividire $a b^2 c^3$ durch $a b c$, $-15 x^2 y^5$ durch $-3 x y^3$,
 $-10 a b x^3 y$ durch $2 a x^2 y$.
- 2) „ $6 a^2 b - 4 a^2 c + 6 a b c$ durch $2 a$; und
 $5 x^3 y^3 - 35 x^2 y^2 z^2 + 20 x y z^4$ durch $-5 x y$.
- 3) „ $a^2 + 6 a + 5$ durch $a + 1$.
- 4) „ $x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6$ durch $x - 2$.
- 5) „ $6 x^2 - 16 x y + 8 y^2$ durch $2 x - 4 y$.
- 6) „ $6 a^2 c^2 - a c^3 - 12 c^4$ durch $3 a c + 4 c^2$.
- 7) „ $x^4 + 4 y^4$ durch $x^2 + 2 x y + 2 y^2$.
- 8) „ $4 a^4 b^4 + 1$ durch $2 a^2 b^2 - 2 a b + 1$.
- 9) „ $1 - 6 x^5 + 5 x^6$ durch $1 - 2 x + x^2$.
- 10) „ $a^6 + 2 a^3 + 1$ durch $a^2 + 2 a + 1$.

§. 27.

Wir haben oben (§. 26, Beisp. 3 und 4) gesehen, dass $a^3 - x^3$ vollständig durch $a - x$, und $a^3 + x^3$ durch $a + x$ theilbar ist, und dass im Quotienten beide Male die Potenzen von a fortwährend abnehmen, während die von x wachsen. Die folgenden allgemeinen Thatsachen sollten gut vermerkt werden, da sie uns befähigen, in ähnlichen Fällen sofort

den Quotienten niederzuschreiben, was auch in der Praxis oft vorkommt. Es wird begreiflich sein, dass der Exponent n hier benutzt wird, um im Allgemeinen einen beliebigen Exponenten anzudeuten. Wie dem auch sein mag, die Grösse a^n heisst die n te Potenz von a , und wird gelesen a auf der n ten.

Wenn der Exponent ungerade ist, so ist

$a^n + x^n$ (wie $a + x$) theilbar durch $a + x$;

$a^n - x^n$ (wie $a - x$) „ „ $a - x$.

Wenn der Exponent gerade ist, so ist

$a^n + x^n$ (eben wie $a^2 + x^2$) durch keines von beiden;

$a^n - x^n$ (eben wie $a^2 - x^2$) durch beide theilbar.

In jedem Falle nun wird der Quotient (wie aus vorstehender Division ersichtlich ist) aus Gliedern bestehen, in welchen die Potenzen von a abnehmen, und die von x fortwährend wachsen; ist aber der Divisor $a - x$, so sind alle diese Glieder $+$; ist er $a + x$, so sind sie abwechselungsweise $+$ und $-$.

$$\text{So ist } \frac{a^4 - x^4}{a - x} = a^3 + a^2x + ax^2 + x^3,$$

$$\frac{a^4 + x^4}{a + x} = a^3 - a^2x + ax^2 - x^3.$$

Uebungsbeispiele XIII.

Die Quotienten niederzuschreiben von

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $a^5 - x^5$ durch $a - x$. | 2) $a^6 - x^6$ durch $a - x$. |
| 3) $a^6 - x^6$ „ $a + x$. | 4) $1 - x^4$ „ $1 + x$. |
| 5) $x^3 - 1$ „ $x - 1$. | 6) $x^5 + 1$ „ $x + 1$. |
| 7) $a^3b^3 - c^3$ durch $ab - c$. | 8) $a^4 - 16b^4$ durch $a + 2b$. |

Drittes Kapitel.

Einfache Gleichungen.

§. 28.

Eine Gleichung ist der Zustand der Gleichheit von zwei verschiedenen algebraischen Grössen. In solchem Falle besteht die fragliche Gleichheit nicht für jedweden, sondern nur für einige besondere Werthe des einen oder andern der in ihr enthaltenen Buchstaben.

So wird z. B. die Gleichung $x - 3 = (x - 6)$ nur richtig befunden werden, wenn wir dem x den Werth 7 geben, und $x^2 = 3x - 2$ wird stichhalten, nur wenn wir dem x den Werth 1 oder 2 geben.

Wir wollen in Nachstehendem die Methode auseinanderzusetzen, diese Werthe zu finden, welche den einfacheren Gleichungsarten Genüge leisten.

§. 29.

Die letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z , etc. werden gewöhnlich dazu verwendet, jene Grössen zu bezeichnen, welchen besondere Werthe beigelegt werden müssen, um der Gleichung Genüge zu leisten; sie heissen die unbekannten Grössen.

Man sagt, einer Gleichung werde durch irgend einen Werth der unbekannten Grösse Genüge geleistet, wenn derselbe die Werthe der beiden Seiten der Gleichung zu denselben macht.

Diess begreift den Fall in sich, wenn alle Glieder einer Gleichung auf Einer Seite stehen und 0 auf der andern, wie bei $x^2 - 3x + 2 = 0$; es wird durch 1 oder 2 Genüge geleistet; denn jedes von beiden, für x gesetzt, macht die erste Seite $= 0$.

Diejenigen Werthe der unbekannten Grössen, durch welche die Gleichung befriedigt wird, heissen ihre Wurzeln.

So ist z. B. 7 die Wurzel von $x - 3 = 4 (x - 6)$, und 1 und 2 sind die Wurzeln von $x^2 - 3x + 2 = 0$.

§. 30.

Von einer Gleichung mit Einer unbekannten Grösse sagt man, sie habe eben so viele Grade, als durch den Exponenten der höchsten Potenz ihrer unbekannten Grösse angezeigt wird.

So ist $x - 3 = 4$ eine Gleichung vom ersten Grade, oder eine einfache Gleichung; $x^2 = 3x - 2$ ist vom zweiten Grade oder eine quadratische Gleichung; $x^3 - 6 = 6x^2$ ist vom dritten Grade oder eine kubische Gleichung; $x^4 - 4x = 13$ ist vom vierten Grade oder eine biquadratische Gleichung, etc. etc.

Im Vorbeigehen mag hier erwähnt werden: es lässt sich beweisen, dass jede solche Gleichung eben so viele Wurzeln hat, als die Zahl ihres Grades angibt, und nicht weiter.

§. 31.

Jedes Glied auf jeder Seite einer Gleichung darf mit derselben Grösse multipliziert oder dividirt werden, ohne dass dadurch die in ihr ausgedrückte Gleichheit gestört wird.

Z. B. wenn man in: $3x + \frac{5}{4}x = 34$ jedes Glied mit 4 multipliziert, so haben wir: $12x + 5x = 136$, oder $17x = 136$; also auch, wenn man jedes Glied durch 17 dividirt, $x = \frac{136}{17} = 8$.

Ferner, wenn $12x + 6x = 144$, und man jedes Glied durch 6 dividirt, $2x + x = 24$, oder $3x = 24$; woraus, wenn man jedes Glied durch 3 dividirt, $x = 8$. Wir finden daher, dass 8 die Wurzel einer jeden dieser zwei Gleichungen ist.

§. 32.

Eine Gleichung kann mithin von Brüchen befreit werden, indem man jedes Glied durch ein gemeinschaftliches Vielfaches aller Nenner multipliziert. Wird das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ver-

wendet, so wird die Gleichung die einfachste Gestalt annehmen.

Wenn $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 13$ ist, so multiplizire jedes Glied mit 12, welches das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 2, 3, 4, und wir haben

$$\frac{12}{2}x + \frac{12}{3}x + \frac{12}{4}x = 156, \text{ oder } 6x + 4x + 3x = 156,$$

woraus $13x = 156$, und $x = \frac{156}{13} = 12$.

§. 33.

Eine Grösse kann von einer Seite einer Gleichung auf die andere durch Wechsel ihres Vorzeichens versetzt werden, ohne dass die zuerst ausgedrückte Gleichheit gestört wird.

Wenn also $x - a = y + b$, so addire a zu jeder Seite der Gleichung (was offenbar die Gleichheit nicht stören wird), und wir haben $x = y + b + a$, und wenn man b von jeder Seite subtrahirt, erhalten wir $x - b = y + a$. Hieraus sehen wir, dass das $-a$ auf die andere Seite mit seinem in $+$ verwandelten Vorzeichen geschafft worden ist, und ebenso auch das $+b$ mit seinem in $-$ verwandelten Vorzeichen.

Wenn daher die Vorzeichen aller Glieder auf beiden Seiten einer Gleichung gewechselt werden, so wird die durch sie ausgedrückte Gleichheit nicht aufgehoben werden.

Einfache Gleichungen mit Einer unbekannten Grösse.

§. 34.

Um eine einfache Gleichung mit Einer unbekannten Grösse aufzulösen, so

- 1) befreie sie, wenn nöthig, von Brüchen;
- 2) sammle (ordne) alle die unbekannten Grössen enthaltenden Glieder auf Eine Seite der Gleichung,

und die bekannten Grössen auf die andere, indem man sie nöthigenfalls mittelst Wechsel des Vorzeichens versetzt.

3) Addire die Glieder jeder Seite zusammen, und dividire die Summe der bekannten Grössen durch die Summe der Coefficienten der unbekannten Grössen; und dann wird die verlangte Wurzel gefunden sein.

Beisp. 1. $4x + 2 = 3x + 4.$

Da hier keine Brüche vorhanden sind, so haben wir nur die Glieder zu ordnen: daher $4x - 3x = 4 - 2$, oder $x = 2$, die Wurzel der Gleichung.

Beisp. 2. $4x + 5 = 10x - 16,$

hier $10x - 4x = 5 + 16$; daher $6x = 21$, und

$$x = \frac{21}{6} = 3 \frac{3}{6} = 3 \frac{1}{2}.$$

Beisp. 3. $5(x + 1) - 2 = 3(x - 5).$

Hier ist, wenn man die Klammern entfernt,

$$5x + 5 - 2 = 3x - 15, \text{ daher}$$

$$5x - 3x = -15 - 5 + 2, \text{ oder } 2x = -18, \text{ und daher } x = -9.$$

Uebungsbeispiele XIV.

Löse die Gleichungen:

1) $3x + 4 = 4x + 3.$

2) $3x - 4 = 4x - 9.$

3) $2 + 5x = 18 - 3x.$

4) $2x = 9 + 5x.$

5) $x - 2 = 3(x - 4) - 5.$

6) $x - 2 - (2x - 3) = 3x - 4.$

7) $(x + 2)^2 = (x - 1)(x - 2) - 12.$

8) $2(x - 3) - 3(x - 2) + 4(x - 3) = 0.$

9) $(2x - 3)^2 + (3x - 2)^2 = x^2 + 3(2x - 1)^2.$

10) $(x - 1)^2 + 2(x - 2)^2 + 3(x - 3)^2 = 6(x^2 - 8).$

Beisp. 5. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = 11 + \frac{1}{8}x.$

Hier befreien wir zuerst die Gleichung von Brüchen, indem wir jedes Glied mit 24, dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner, multiplizieren (wir bemerken, dass beim ersten Bruch $\frac{24}{2} = 12$, beim zweiten $\frac{24}{3} = 8$, und so weiter bei

den andern); man erhält so $12x - 8 \cdot 2x + 6 \cdot 3x = 264 + 3x$,

oder $12x - 16x + 18x = 264 + 3x$, folglich

$12x - 16x + 18x - 3x = 264$, daher $11x = 264$, und

$$x = \frac{264}{11} = 24.$$

Beisp. 6. $\frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{3}(x + 2) = 16 - \frac{1}{4}(x + 3).$

Multipliziert man mit 12, so haben wir:

$$6(x + 1) + 4(x + 2) = 192 - 3(x + 3)$$

$$\text{oder } 6x + 6 + 4x + 8 = 192 - 3x - 9,$$

daher $6x + 4x + 3x = 192 - 9 - 6 - 8$, folgt $13x = 169$,

$$\text{und } x = \frac{169}{13} = 13.$$

Uebungsbeispiele XV.

Die Gleichungen zu lösen:

$$1) \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11 - x.$$

$$2) \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - 1.$$

$$3) \quad \frac{2x}{3} + \frac{x - 2}{2} = 4 - \frac{x - 3}{3}.$$

$$4) \quad \frac{3x - 1}{2} - \frac{2(x - 1)}{3} = \frac{x - 3}{4}.$$

$$5) \quad x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(3x - 1) - \frac{1}{3}(x - 1).$$

$$6) \quad (x - 1)^2 - \frac{1}{2}(x - 2)^2 = (x - 2)^2 - \frac{1}{2}(x - 3)^2.$$

$$7) \quad \frac{3x + 4}{5} - \frac{7x - 3}{2} = \frac{x - 16}{4}.$$

$$8) \quad x - 2 + \frac{2x - 1}{3} - \frac{4(x - 1)}{5} = 2\frac{4}{5}.$$

$$9) \quad \frac{3x - 1}{2} - \frac{2x - 2}{3} = \frac{x - 3}{4} - \frac{x - 5}{6} + 5\frac{1}{3}.$$

$$10) \quad \frac{1}{4}(3x + 5) - \frac{2}{3}(x + 3) = 10(9 - x).$$

$$11) \quad \frac{x + 3}{2} - \frac{3(11 - x)}{7} = \frac{6(x - 4)}{5} - \frac{x - 3}{7}.$$

$$12) \quad x - \frac{x - 1}{2} - \frac{2(x - 2)}{3} - \frac{3(x - 3)}{4} = \frac{x + 1}{12}.$$

Aufgaben, welche auf einfache Gleichungen führen.

§. 35.

Wir werden nunmehr die praktische Anwendung des Obigen bei der Lösung vieler interessanter arithmetischer Fragen ansehen. Bei diesem Geschäfte jedoch muss der Schüler, nachdem er die in den folgenden Beispielen angewendeten Methoden sich eingeprägt hat, sehr oft seinem eigenen Scharfsinn überlassen werden, da man keine allgemeine Regel zu ihrer Lösung aufstellen kann. Der einzige Rath, der ertheilt werden kann, ist, die vorgelegte Frage sorgfältig zu überlesen und deren Sinn wohl zu erwägen; dann wird es sich immer zeigen, dass eine, vorerst unbekannte Grösse aus den vorhandenen Datas (gegebenen Grössen) gefunden werden soll. Diese Grösse werde durch x dargestellt; man schreibe nun in algebraischer Sprache die in der Frage gelieferten Ansätze hin, und benütze x , so oft in ihr diese unbekannte Grösse verlangt wird. Man wird auf diese Weise (in den Aufgaben, welche wir nun betrachten wollen) an einer einfachen Gleichung ankommen, mittelst welcher der Werth von x gefunden werden kann.

Beisp. 1. Bei welcher Zahl ist, nachdem 8 zu ihr addirt ist, ein Viertel der Summe gleich 29?

Es möge x die verlangte Zahl vorstellen, addire 8 hinzu, so haben wir $x + 8$; ein Viertel hievon ist $\frac{1}{4}(x + 8)$, und diess ist gleich 29; wir haben daher $\frac{1}{4}(x + 8) = 29$, woraus $x = 108$.

Beisp. 2. Welches ist die Zahl, deren Doppeltes ihre Hälfte um 6 übertrifft?

Es möge $x =$ der Zahl sein; dann ist das Doppelte von x , $2x$, die Hälfte von x ist $\frac{1}{2}x$; daher $2x - \frac{1}{2}x = 6$; hieraus $x = 4$.

Beisp. 3. A. und B. haben 50 fl. mit einander, und B. hat um die Hälfte mehr als A. Den Antheil des A zu finden.

Setze $x = A.$'s Antheil in Gulden, dann ist $50 - x = B.$'s Antheil. Aber B. hat nur die Hälfte mehr als A., d. h. er hat $x + \frac{1}{2}x$ oder $\frac{3}{2}x$; daher $50 - x = \frac{3}{2}x$, wird $x = 20$ fl.

NB. Man merke, dass um die Hälfte mehr als eine Grösse x durch $1\frac{1}{2}x$ oder $\frac{3}{2}x$ ausgedrückt wird. Ebenso wird um ein Drittel mehr als x durch $1\frac{1}{3}x$ oder $\frac{4}{3}x$ ausgedrückt.

Beisp. 4. Ein Fass, welches 270 Mass hielt, wurde mit einer Mischung von Branntwein, Wein und Wasser gefüllt. Es waren 30 Mass Wein mehr darin als Branntwein, und 30 Mass Wasser mehr, als Wein und Branntwein zusammen.

Wie viel waren es von einem jeden?

Es sei $x =$ der Zahl der Masse Branntwein,
so ist $x + 30 =$ „ „ „ „ Wein
und $2x + 30 =$ „ „ „ „ Wein und Branntwein zusammen;
folglich $2x + 30 + 30$ oder $2x + 60 =$ Mass Wasser; aber die Gesamtzahl der Masse betrug 270,

$$\text{folglich } x + (x + 30) + (2x + 60) = 270,$$

woraus $x = 45$, die Zahl der Masse Branntwein,

$$x + 30 = 75, \text{ „ „ „ „ Wein,}$$

$$2x + 60 = 150, \text{ „ „ „ „ Wasser.}$$

Beisp. 5. Eine Summe von £ 50 soll unter A., B. und C. getheilt werden, so dass A. 13 Guineen mehr als B., und C. £ 5 mehr als A. bekomme; ihre Antheile zu bestimmen.

Es sei $x = B.$'s Antheil in Schillingen: und bemerke, dass £ 50 = 1000 s.; folglich $x + 273 = A.$'s, und $(x + 273) + 100$ oder $x + 373 = C.$'s Antheil; dann ist

$$(x + 273) + x + (x + 373) = 3x + 646 = 1000,$$

daher $3x = 354$, und $x = 118$, $x + 273 = 391$, $x + 373 = 491$, und die Antheile sind beziehungsweise 391 s., 118 s., 491 s., oder £ 19. 11 s., £ 5. 18 s., £ 24. 11 s.

Uebungsbeispiele XVI.

- 1) Zu dem Dreifachen einer gewissen Zahl addire ich 4, und die Summe ist 100. Welches ist die Zahl?

- 2) Die Zahl zu finden, deren um 2 vermindertes Drittel gleich ihrem um 3 vermehrten Viertel ist.
- 3) Welches ist die Zahl, welche, mit 3 multipliziert und um ihre eigene Hälfte vermehrt, 21 wird?
- 4) Eine solche Zahl zu finden, deren Doppeltes ihre Hälfte um 12 übersteigen soll.
- 5) Welche zwei Zahlen sind es, deren Summe 33, und deren Differenz 15 ist?
- 6) Eine solche Zahl zu finden, deren Hälfte und deren Drittel zusammen um 14 grösser als ihr vierter Theil sein soll.
- 7) Ein Pferdehändler verkaufte 8 Pferde um einen gewissen Preis, und später 6 weitere um den doppelten Preis; für die letztern erhielt er 80 Karolin mehr als für die erstern. Die einzelnen Preise zu finden.
- 8) A. ist halb so alt als B.: vor 10 Jahren war er 20 Jahre jünger als B. Wie alt ist jetzt B.?
- 9) Theile 40 fl. unter 3 Personen, so dass die erste 5 fl. mehr als die zweite und 3 fl. weniger als die dritte erhält.
- 10) A. hat halb so viel Geld bei sich als B., beide mit einander haben 25 fl. Wie viel hat jeder?
- 11) Bei einer Wahl waren drei Candidaten im Wurf. Der siegreiche Candidat hatte 15 Stimmen vor dem zweiten und 75 Stimmen vor dem dritten voraus, und der dritte bekam ein Sechstel der Gesamtzahl der Stimmen. Wie viel stimmten für jeden einzelnen?
- 12) A. verkauft den vierten Theil seines Korbs Eier an B. und um ein Drittel mehr an C.: B. und C. haben nun unter sich 42 Eier. Wie viele hatte A. anfangs?
- 13) Ich kaufte 20 Ellen Zeug um 10 österreichische Gulden, und für einen Theil desselben gab ich 11 Groschen, für das übrige 7 Groschen die Elle. Wie viel Ellen eines jeden kaufte ich?
- 14) A. und B. haben zusammen 10 fl., A. hat um die Hälfte mehr als C., und B. und C. haben zusammen 9 fl. Wie viel hat jeder?
- 15) A. gewinnt 3 Thaler von B.: sie fingen mit gleichen Summen an, aber jetzt besitzt A. um ein Viertel mehr als B. Was hatte jeder von ihnen anfangs?
- 16) Eine Person vermacht 1000 Thaler einer Armenanstalt und den Rest seines Vermögens unter seine drei Söhne, so dass

der erste um die Hälfte mehr als der zweite, und zweimal so viel als der dritte bekommen soll. Was erhält jeder, wenn das für sämtliche Zwecke hinterlassene Vermögen 14000 Thaler betrug?

Viertes Kapitel.

Potenzirung und Radicirung.

§. 36.

Potenzirung ist der Name für das Geschäft, mittelst dessen wir die Potenzen der Grössen finden. Schon §. 22 hatten wir Gelegenheit, das Quadrat eines Binoms aufzustellen; doch sind alle Fälle der Potenzirung rein nur Multiplicationsbeispiele, wobei die Faktoren alle dieselben sind.

Hiebei wäre zu merken: Eine Potenz einer Grösse wird potenziert, indem man die Grundzahl mit dem Produkte der Exponenten potenziert.

So ist z. B. der Cubus von x^2 , nemlich $(x^2)^3 = x^6$; denn es ist $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^{2+2+2}$ (§. 20) $= x^6$; und in gleicher Weise $(x^3)^2 = x^6 = (x^2)^3$, d. h. das Quadrat des Cubus ist gerade so viel als der Cubus des Quadrats einer Grösse etc.

Ebenso ist $(a^3)^4 = a^{12} = (a^4)^3$; $(2x^3y^2)^2 = 4x^6y^4$;

$(-2xy^2z^3)^3 = -8x^3y^6z^9$.

§. 37.

Wir können daher das Geschäft, die 4te Potenz einer Grösse zu finden, dadurch abkürzen, dass wir ihr Quadrat quadriren; und in ähnlicher Weise dürfen wir, um die 6te, 8te, u. s. w. Potenz zu finden, nur die 3te, 4te, u. s. w. in's Quadrat erheben.

Um nun den Cubus oder die 3te Potenz zu finden, können wir das Produkt der 1ten und 2ten, d. h. der Grösse selbst und ihres Quadrats nehmen; um die 5te zu finden, dürfen wir nur das Produkt des

Quadrats und Cubus nehmen; um die 7te zu finden, das der 3ten und 4ten; und so weiter.

Demnach werden wir haben:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

durch Multiplication,

$$(a - b)^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$(a \pm b)^4 = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a^2 \pm 2ab + b^2)$$

$$= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4,$$

$$(a \pm b)^5 = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3)$$

$$= a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5.$$

Obige Resultate mögen eingeprägt und in den folgenden Beispielen angewendet werden. Die Entwicklungen höherer Potenzen werden im Allgemeinen am besten mittelst der Binomialreihe erhalten, welche später gegeben werden soll.

Beispiel.

$$\begin{aligned} (2x - 3)^4 &= (2x)^4 - 4 \cdot 3 (2x)^3 + 6 \cdot 3^2 (2x)^2 - 4 \cdot 3^3 (2x) + 3^4 \\ &= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81. \end{aligned}$$

Übungsbeispiele XVII.

Schreibe die Entwicklungen nieder von

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1) $(x - 2)^3.$ | 2) $(y + 2)^4.$ | 3) $(z - 2)^5.$ |
| 4) $(x + 3)^3.$ | 5) $(x - 3)^4.$ | 6) $(x + 3)^5.$ |
| 7) $(1 - 2y)^4.$ | 8) $(2z - 1)^5.$ | 9) $(2m - n)^3.$ |
| 10) $(p + 3q)^4.$ | 11) $(3r - s)^5.$ | 12) $(2x - 3y)^5.$ |

§. 38.

Das nachfolgende Resultat ist bemerkenswerth, da es die Form des Quadrats irgend eines Polynoms zeigt.

$$\begin{aligned} &(a + b + c + d + \text{etc.})^2 \\ &= a^2 + 2a(b + c + d + \text{etc.}) + (b + c + d + \text{etc.})^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + \text{etc.} \\ &\quad + b^2 + 2b(c + d + \text{etc.}) + (c + d + \text{etc.})^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + \text{etc.} \\ &\quad + b^2 + 2bc + 2bd + \text{etc.} \quad (1) \\ &\quad + c^2 + 2cd + \text{etc.} \\ &\quad + d^2 + \text{etc.} \\ &= a^2 + (2a + b)b + [2(a + b) + c]c + [2(a + b + c) + d]d + \text{etc.} \\ &= a^2 + (2a + b)b + (2a' + c)c + (2a'' + d)d + \text{etc.}, \quad (2) \\ &\text{wenn wir } a' \text{ für } a + b, a'' \text{ für } a + b + c, \text{ etc. schreiben.} \end{aligned}$$

Wir sehen aus (1), dass das Quadrat irgend eines Polynoms gebildet werden kann in folgender Weise: das Quadrat jeder einzelnen Grösse nebst dem doppelten Produkt jeder einzelnen Grösse mit allen übrigen Grössen, die auf dieselbe folgen.

Eine andere Form dieses Resultats ist in (2) gegeben, auf welche wir später wieder Bezug nehmen wollen.

Beispiel 1.

$$(1 + 2x + 3x^2)^2 = 1 + 2(2x + 3x^2) + 4x^2 + 4x(3x^2) + 9x^4 \\ = 1 + 4x + 10x^2 + 12x^3 + 9x^4.$$

Beispiel 2.

$$(1 - 2x)^6 = [(1 - 2x)^3]^2 = (1 - 6x + 12x^2 - 8x^3)^2 \\ = 1 - 12x + 24x^2 - 16x^3 \\ + 36x^2 - 144x^3 + 96x^4 \\ + 144x^4 - 192x^5 + 64x^6 \\ = 1 - 12x + 60x^2 - 160x^3 + 240x^4 - 192x^5 + 64x^6.$$

Uebungsbeispiele XVIII.

Die Entwicklungen zu erhalten von:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| 1) $(1 + x - x^2)^2$. | 2) $(1 - 2x - x^2)^2$. |
| 3) $(1 - 2x + 3x^2)^2$. | 4) $(a^3 - a^2 + a - 1)^2$. |
| 5) $(2x^2 - x - 3)^2$. | 6) $(a - x)^6$. |
| 7) $(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)^2$. | 8) $(a - x)^8$. |

§. 39.

Der Schüler möge die folgenden Zusätze sich besonders merken:

(1) Da irgend eine gerade Anzahl gleicher Vorzeichen, ob sie nun alle $+$ oder alle $-$ sind, bei der Multiplication $+$ geben werden, so folgt: jede gerade Potenz einer Grösse gibt ein und dasselbe, mag jene Grösse positiv oder negativ genommen werden; das heisst: $(+ a)^2$ und $(- a)^2$ ist jedes $= + a^2$, und $(1 - x + x^2)^4 = [- (1 - x + x^2)]^4$, oder $= (-1 + x - x^2)^4$.

(2) Keine gerade Potenz irgend einer Grösse kann negativ sein.

(3) Irgend eine ungerade Potenz wird dasselbe Vorzeichen haben wie die Grundzahl selbst.

§. 40.

Radicirung ist der Name für das Geschäft, vermittelt dessen wir die Wurzeln der Grössen finden.

Da die dritte Potenz von $a^2 = a^6$, so ist die dritte Wurzel von $a^6 = a^2$; ebenso $\sqrt[4]{a^4} = a$, $\sqrt[4]{16a^8b^4} = 2a^2b$, u. s. s. w.; und ebenso können wir oft eine vorgeschriebene Wurzel einer einfachen Grösse ausziehen, indem wir den Exponenten derselben durch den der Wurzel dividiren.

Kann jedoch der Exponent der Grösse nicht genau durch den der Wurzel dividirt werden (wie z. B. in der 5ten Wurzel von a^2 , wo der 2er nicht durch 5 dividirt werden kann), dann können wir auch nicht die Wurzel derselben finden, sondern wir können nur andeuten, dass die Wurzel auszuziehen ist, indem wir die Grösse niederschreiben und das $\sqrt{}$ zeichen mit dem Exponenten der fraglichen Wurzel vorsetzen, wie $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[3]{a^4}$. Solche Grössen heissen irrationale Grössen.

§. 41.

Wir können ferner beweisen, dass irgend eine Irrationalzahl sich nicht genau durch eine gebrochene Zahl darstellen lässt.

Ist die Wurzel durch keine ganze Zahl darstellbar, so ist:
 $w < \sqrt[n]{z} < w + 1$, wo alle Buchstaben ganze Zahlen bedeuten.
 Gesetzt, es wäre $\sqrt[n]{z} = w + \frac{p}{q}$, wo $\frac{p}{q}$ einen echten Bruch bedeutet, so wäre auch

$$\left(w + \frac{p}{q}\right)^n = \left(\frac{wq + p}{q}\right)^n \text{ oder } \frac{(wq + p)^n}{q^n} = z,$$

woraus sich $\frac{(wq + p)^n}{q} = zq^{n-1}$ d. h. eine ganze Zahl ergeben

würde, was der Voraussetzung, dass $\frac{p}{q}$ ein Bruch sei, widerspricht.

§. 42.

Aus §. 39 folgt unmittelbar:

(1) Jede gerade Wurzel einer positiven Grösse hat ein doppeltes Vorzeichen $\pm$.

(2) Es kann keine gerade Wurzel einer negativen Grösse geben.

(3) Jede ungerade Wurzel einer Grösse wird dasselbe Vorzeichen wie die Grösse selbst haben.

$$\sqrt[4]{\frac{16a^2}{9b^2}} = \pm \frac{4a}{3b}, \sqrt[3]{-8x^3y^6} = -2xy^2, \sqrt[4]{\frac{625a^4y^8}{81x^4}} = \pm \frac{5ay^2}{3x}.$$

Wenn wir daher ein Irrational in Form einer ungeraden Wurzel einer negativen Grösse haben, so können wir die Grösse positiv unter das Wurzelzeichen schreiben und das negative Vorzeichen aussen hin setzen; z. B. $\sqrt[5]{-x^3} = -\sqrt[5]{x^3}$; $\sqrt[3]{a^6 - b^2} = a^2 + \sqrt[3]{b^2}$. Diess kann aber bei einer geraden Wurzel einer negativen Grösse nicht stattfinden, wie z. B. bei $\sqrt{-x^3}$; solche muss gelassen werden wie sie ist, und wird eine unmögliche (laterale) oder imaginäre Grösse genannt. Der Unterschied zwischen irrationalen und imaginären Grössen besteht darin, dass die erstern reelle Werthe haben, obgleich wir sie nicht genau finden können, während keine positive oder negative Grösse existiren kann, deren gerade Potenz eine negative Grösse liefern würde.

Die imaginären Grössen werden jedoch bei einigen der höheren Operationen der Algebra angewendet; für den Augenblick aber wollen wir sowohl diese als auch die irrationalen Grössen verlassen.

§. 43.

Die Quadratwurzel einer algebraischen Summe zu finden.

Wir wissen, dass das Quadrat von $a + b$ ist:
 $a^2 + 2ab + b^2$; sehen wir nun, wie wir aus $a^2 + 2ab + b^2$ dessen Quadratwurzel ableiten können.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \quad (a + b \\ \underline{a^2} \\ 2a + b) \mid 2ab + b^2 \\ \underline{2ab + b^2} \end{array}$$

Lasst uns zuerst die Grösse $a^2 + 2ab + b^2$ niederschreiben. Nun kann a , das erste Glied der Wurzel, unmittelbar gefunden werden, wenn man die Quadratwurzel des ersten Glieds der Grösse nimmt: setze dann a zur Rechten und subtrahire hierauf a^2 ; es bleibt uns nun $2ab + b^2$, und wenn wir $2ab$ durch $2a$ dividiren, erhalten wir $+ b$, das andere Glied der Wurzel; addiren wir endlich dieses b zu dem $2a$, multiplizire das so gebildete $2a + b$ mit b , und subtrahire das Produkt; es bleibt hier kein Rest.

Befolgen wir nun diese Regel in irgend einem andern Falle, so dürfen wir, wenn sich kein Rest ergibt, schliessen, dass die Wurzel genau herausgebracht ist.

Beisp. 1.

$$\begin{array}{r} 9x^2 + 6xy + y^2 \quad (3x + y \\ \underline{9x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x + y) \quad 6xy + y^2 \\ \underline{6xy + y^2} \end{array}$$

Beisp. 2.

$$16a^2 - 56ab + 49b^2 \quad (4a - 7b$$

$$\begin{array}{r} 16a^2 \\ \underline{16a^2} \\ 8a - 7b) \quad - 56ab + 49b^2 \\ \underline{- 56ab + 49b^2} \end{array}$$

Beisp. 3.

$$4a^2 - 4ab - b^2 \quad (2a - b$$

$$\begin{array}{r} 4a^2 \\ \underline{4a^2} \\ 4a - b) \quad - 4ab - b^2 \\ \underline{- 4ab - b^2} \\ - 2b^2 \end{array}$$

Hier finden wir einen Rest $-2b^2$; wir schliessen daher, dass $2a - b$ nicht die genaue Wurzel von $4a^2 - 4ab - b^2$, welche irrational ist, und blos geschrieben werden kann: $\sqrt{4a^2 - 4ab - b^2}$.

§. 44.

Wenn die Wurzel aus mehr als zwei Gliedern besteht, so wird ein ähnliches Verfahren uns dieselbe verschaffen, wie im folgenden Beispiel. Es wird erhellen, dass der Divisor bei jedem Weitergehen erhalten wird, indem man den schon gefundenen Theil der Wurzel verdoppelt oder (was auf dasselbe hinausläuft und in der Ausführung passender ist) das letzte Glied des vorhergehenden Divisors verdoppelt, und dann das neue Glied der Wurzel anhängt.

Beispiel.

$$\begin{array}{r}
 16x^6 - 24x^5 + 25x^4 - 20x^3 + 10x^2 - 4x + 1 \quad (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \\
 \underline{16x^6} \\
 8x^3 - 3x^2) - 24x^5 + 25x^4 \\
 \quad \quad \quad - 24x^5 + 9x^4 \\
 \hline
 8x^3 - 6x^2 + 2x) \quad 16x^4 - 20x^3 + 10x^2 \\
 \quad \quad \quad 16x^4 - 12x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 8x^3 - 6x^2 + 4x - 1) \quad - 8x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \\
 \quad \quad \quad \quad - 8x^3 + 6x^2 - 4x + 1. \\
 \hline
 \end{array}$$

§. 45.

Wie die 4te Potenz einer Grösse das Quadrat ihres Quadrats (§. 37) ist, so ist die 4te Wurzel einer Grösse die Quadratwurzel ihrer Quadratwurzel, und kann daher mittelst der vorhergehenden Regel gefunden werden.

Z. B. wenn verlangt wird, die 4te Wurzel von $a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$ zu finden, so findet man als Quadratwurzel: $a^2 + 2ax + x^2$, und für die Quadratwurzel hiervon: $a + x$, welches also die 4te Wurzel des gegebenen Ausdrucks ist.

§. 46.

Es ist hervorzuheben, wie in §. 42: alle geraden Wurzeln nehmen doppeltes Vorzeichen an.

So kann die Quadratwurzel von $a^2 + 2ab + b^2$ sein, — $(a + b)$, das ist, — $a - b$, so gut als $a + b$: und in der That konnte der erste Theil der Wurzel, den wir durch Ausziehung der Wurzel von a^2 finden, sowohl — a als a gewesen sein, und in Rücksicht hierauf würden wir auch — b erhalten haben.

Uebungsbeispiele XIX.

Die Quadratwurzeln zu finden von:

- 1) $4a^2 - 4ab + b^2$.
- 2) $9x^2 - 6xy + y^2$.
- 3) $16a^4 + 40a^3b + 25a^2b^2$.
- 4) $25a^4b^2c^2 + 10a^2bc^5 + c^8$.
- 5) $1 - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4$.
- 6) $9a^4 - 12a^3b + 22a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4$.
- 7) $x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$.
- 8) $4x^6 - 12x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 11x^2 - 4x + 4$.
Ziehe die 4te Wurzel aus von
- 9) $16m^4 - 96m^3 + 216m^2 - 216m + 81$.
Ziehe die 8te Wurzel aus von
- 10) $x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$.

§. 47.

Die Methode, die Quadratwurzel aus einer Zahlengrösse zu finden, wird aus dem Vorhergehenden abgeleitet.

Da $1 = 1^2$, $100 = 10^2$, $10000 = 100^2$ etc., so ergibt sich: die Quadratwurzel irgend einer Zahl zwischen 1 und 100 liegt zwischen 1 und 10, d. h. die Quadratwurzel jeder 1- oder 2zifferigen Zahlen ist eine Zahl mit einer Ziffer; ebenso liegt die Quadratwurzel irgend einer Zahl zwischen 100 und 10000 d. h. von 3 oder 4 Ziffern, zwischen 10 und 100, d. h. sie ist eine 2ziffrige Zahl etc. Wenn wir daher bei jeder ungeraden Stelle einer gegebenen Qua-

dratzahl einen Strich ziehen und bei den Einsern beginnen, so wird die Anzahl der Striche genau die Anzahl der Ziffern in ihrer Quadratwurzel anzeigen.

Beispiel.

$$\begin{array}{r}
 18\dot{6}\dot{6}2\dot{4} \mid (400 + 30 + 2 \\
 160000 \\
 \hline
 800 + 30 = 830) \quad 26624 \\
 \quad \quad \quad 24900 \\
 \hline
 800 + 60 + 2 = 862) \quad 1724 \\
 \quad \quad \quad 1724 \\
 \hline
 \end{array}$$

Hier ist die Anzahl der Striche 3, und daher wird die Anzahl der Ziffern in der Wurzel drei sein. Nun ist die grösste Quadratzahl, die in 18 enthalten ist, die erste Gruppe (wie man sie heisst) 16, und die Zahl liegt offenbar zwischen 160000 und 250000, d. h. zwischen den Quadraten von 400 und 500. Wir nehmen desshalb 400 für den ersten Theil der Wurzel, und indem wir gerade wie zuvor verfahren, erhalten wir die ganze Wurzel, $400 + 30 + 2 = 432$.

Beisp. 1.

$$\begin{array}{r}
 18 \mid 66 \mid 24 \mid (432 \\
 16 \\
 \hline
 83) \quad 266 \\
 \quad \quad 249 \\
 \hline
 862) \quad 1724 \\
 \quad \quad 1724 \\
 \hline
 \end{array}$$

Beisp. 2.

$$\begin{array}{r}
 7 \mid 78 \mid 41 \mid (279 \\
 4 \\
 \hline
 47 \mid 378 \\
 \quad \quad 329 \\
 \hline
 549) \quad 4941 \\
 \quad \quad 4941. \\
 \hline
 \end{array}$$

Die Nullen werden gewöhnlich bei der Ausführung weggelassen, und es wird klar sein, dass wir bei jedem Weitergehen nur die nächste Gruppe, anstatt des ganzen Restes, herunter zu setzen brauchen.

Bei Beisp. 2 merke (1), der zweite Rest 49 ist grösser als der Divisor 47; diess kann oft vorkommen, aber es kann diess keinen Anstand ergeben, da, wenn wir statt des 7ers 8 bei der 2ten Gruppe nähmen, der Subtrahend 384 wäre, welcher zu gross ist; und (2) (um den zweiten Divisor zu bilden), beim Verdoppeln der letzten Ziffer des ersten Divisors wird dieselbe 14 und muss desshalb 1 zu der

vorhergehenden Ziffer 4 addirt werden, welche nun 5 wird. In der That ist auch der erste Divisor $400 + 70$, welches beim Verdoppeln seines zweiten Gliedes $400 + 140$ oder 540 wird.

Beisp. 3.

 $10\dot{0} | 29\dot{0} | 12\dot{0} | 64\dot{0} | (3208$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 62) \quad 129 \\ \quad 124 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6408) \quad 51264 \\ \quad 51264 \\ \hline \end{array}$$

In Beisp. 3 haben wir einen Fall von einer innerhalb der Wurzel auftretenden Null.

§. 48.

Sollte die Wurzel etwa eine Anzahl Dezimalstellen haben, so ist (nach der Regel über die Multiplikation der Dezimalbrüche) klar, dass das Quadrat 2mal so viele Stellen haben wird, und daher wird die Anzahl der Dezimalstellen in jedem quadratischen Dezimalbruch nothwendig gerade sein, und die Anzahl der Dezimalstellen seiner Wurzel wird die Hälfte von jener Anzahl sein.

Ist daher die gegebene Quadratzahl ein Dezimalbruch, so hat er auch eine gerade Anzahl von Stellen. Setzen wir nun, wie vorhin, den Strich neben die Einserziffer und dann neben jede ungerade Stelle auf beiden Seiten derselben, so wird die Anzahl der Striche zur Linken die Anzahl der ganzen Ziffern der Wurzel, und die Anzahl der Striche zur Rechten die Anzahl der Dezimalstellen anzeigen.

Z. B. 10,291264 würde als $10\dot{0}, 29\dot{0} | 12\dot{0} | 64\dot{0}$ gruppirt werden, da der Strich zuerst neben die Einserziffer 0 gesetzt wird; und die Wurzel wird eine ganze und drei Dezimalstellen haben; sie wird nämlich (Beisp. 3 oben) 3,208 sein.

Ist jedoch die gegebene Zahl ein Dezimalbruch von einer ungeraden Stellenzahl, oder ist in irgend einem Falle ein Rest vorhanden, dann gibt es keine genaue Quadratwurzel; aber wir können uns derselben, so weit als wir wollen, annähern (merke: den Strich zuerst neben die Einserziffer setzen)

durch Anhängen von Nullen (welche vermöge des Wesens der Dezimalbrüche den Werth der Zahl selbst nicht verändern) und setzen dieselben herab, sobald sie nöthig werden, bis wir so viele Dezimalstellen in der Wurzel haben, als wir wünschen.

Beisp. 1.

$$\begin{array}{r}
 2 \mid (1,414 \dots \\
 1 \\
 \hline
 24) \overline{100} \\
 96 \\
 \hline
 281) \overline{400} \\
 281 \\
 \hline
 2824) \overline{11900} \\
 11296 \\
 \hline
 \end{array}$$

Beisp. 2.

$$\begin{array}{r}
 2 \mid 59 \mid 35 \mid 10 \mid (16,104 \dots \\
 1 \\
 \hline
 26) \overline{159} \\
 136 \\
 \hline
 321) \overline{335} \\
 321 \\
 \hline
 32204) \overline{141000} \\
 128816 \\
 \hline
 \end{array}$$

Uebungsbeispiele XX.

Findet die Quadratwurzeln von

- 1) 127449; 708964; 3352,41.
- 2) 50,9796; 2835856; 13409,64.
- 3) 2039184; 0,01177225; 10595025.
- 4) 18352656; 29430625; 264875625.
- 5) Ziehe auf 3 Dezimalstellen die Wurzeln aus von 3; 5; 0,1 und 0,02.

Fünftes Kapitel.

Grösstes gemeinschaftliches Mass; kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

§. 49.

Wenn eine Grösse eine andere ohne Rest theilt, so sagt man, sie messe dieselbe, und heisse ein Mass der letztern.

So sind 3, a, b, 3a, ab, a^2 etc. alle Masse von $3a^2b$.

Ein gemeinschaftliches Mass zweier Grössen ist eines, das jede von ihnen ohne Rest theilt.

So sind a , b , $3a$, $3b$, ab , $3ab$ alle gemeinschaftliche Masse von $3a^2b$ und $15abc$; und ihr grösstes gemeinschaftliches Mass, d. h. der grösste gemeinsame Faktor, den dieselben enthalten, ist $3ab$.

§. 50.

Es ist gewöhnlich leicht, durch Musterung, d. h. durch Ueberblicken der zwei Grössen, ihr grösstes gemeinschaftliches Mass zu entdecken, wenn solches ein einfacher Faktor ist, d. h. wenn er nur aus Einem Glied besteht, da er dann als Faktor in jedem Posten einer jeden Grösse vorkommen wird.

Beispiel. $2a^2b$ ist der grösste Theiler von $6a^2b^2 - 8a^4b$, und a^2c von $2a^2c^2 - 5a^2bc$, und mithin ist a^2 , welches das grösste gemeinschaftliche Mass von $2a^2b$ und a^2c^2 ist, das grösste gemeinschaftliche Mass von $6a^2b^2 - 8a^4b$ und $2a^2c^2 - 5a^2bc$.

§. 51.

In ähnlicher Weise können wir manchmal das gemeinschaftliche Mass zweier Grössen, wenn es auch kein einfacher Faktor ist, durch Musterung finden, im Fall es zufällig leicht ist, sie in ihre Grundfaktoren zu zerlegen.

Beispiel. Das grösste gemeinschaftliche Mass von $6a^2x^2(a^2 - x^2)$ und $4a^3x(a + x)^2$ ist leicht als $2a^2x(a + x)$ einzusehen.

§. 52.

Wenn aber das grösste gemeinschaftliche Mass zweier Grössen eine algebraische Summe ist, so kann es im Allgemeinen nicht durch Musterung gefunden, sondern durch eine Methode erhalten werden, welche wir nun auseinander setzen wollen und deren Beweis später gegeben werden soll.

Erklärung. Man sagt: ein algebraischer Ausdruck habe eben so viele Grade, als durch die höchste Potenz des Buchstabens, nach welchem er geordnet ist, angezeigt wird.

Z. B.: $x^2 - 7x + 10$ vom zweiten Grade, $x^3 + 1$ vom dritten Grade.

Begreift er auch andere Buchstaben in sich, so sagt man, er habe so viele Grade eines jeden von ihnen, als der höchste Exponent eines jeden angibt.

So hat $x^4y + 3x^3y^2 + x^2y^3$ vier Grade in x , und drei in y .

Wenn die Grade eines jeden Gliedes dieselben sind, so sagt man, der Ausdruck sei homogen (gleichmässig), und habe so viele Grade, als die Summe der Exponenten jedes Gliedes beträgt.

So ist der letzte Ausdruck ein homogener, und zwar vom fünften Grade.

§. 53.

Es seien nun zwei algebraische Ausdrücke gegeben, deren grösstes gemeinschaftliches Mass zu finden verlangt wird. Ordne sie nach den Potenzen irgend eines gemeinsamen Buchstabens, und dividire den Ausdruck höheren Grades durch den andern; wäre etwa der höchste Exponent derselbe in jedem Ausdruck, so nehme jeden von beiden zum Dividenten. Nehme nun, wie in der Arithmetik, nach der ersten Division den Rest zum Divisor und den vorhergehenden Divisor zum Dividenten, und so fort, bis kein Rest mehr bleibt; dann wird der letzte Divisor das grösste gemeinschaftliche Mass der zwei gegebenen Ausdrücke sein.

Beisp. Finde das grösste gemeinschaftliche Mass von

$$x^2 - 7x + 10 \text{ und } 4x^3 - 25x^2 + 20x + 25.$$

$$x^2 - 7x + 10 \mid 4x^3 - 25x^2 + 20x + 25 \quad (4x + 3$$

$$4x^3 - 28x^2 + 40x$$

$$\hline 3x^2 - 20x + 25$$

$$3x^2 - 21x + 30$$

$$\hline x - 5 \mid x^2 - 7x + 10 \quad (x - 2$$

$$x - 5x$$

$$\hline -2x + 10$$

$$-2x + 10.$$

Antw. $x - 5$.

Uebungsbeispiele XXI.

Das grösste gemeinschaftliche Mass zu finden von

- 1) $3x^2 + x - 2$, und $3x^2 + 4x - 4$.
- 2) $6x^2 + 7x - 3$, und $12x^2 + 16x - 3$.
- 3) $9x^2 - 25$, und $9x^2 + 3x - 20$.
- 4) $8x^2 + 14x - 15$, und $8x^3 + 30x^2 + 13x - 30$.
- 5) $4x^2 + 3x - 10$, und $4x^3 + 7x^2 - 3x - 15$.
- 6) $2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24$, und $2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 7x + 15$.

§. 54.

Haben die gegebenen Ausdrücke *beide* oder *einer* von beiden, irgend einmal einfache Faktoren wie in §. 50, so müssen diese herausgeschafft und die Regel auf die vereinfachten Ausdrücke angewendet werden. Alsdann wird das grösste gemeinschaftliche Mass dieser wie oben gefunden, und es wird dasselbe sein, wie das der gegebenen Ausdrücke; ausgenommen, wenn wir etwa Faktoren aus beiden von ihnen herausschaffen müssen, und diese Faktoren selbst einen gemeinschaftlichen Faktor haben. In diesem Fall muss das obige, aus den vereinfachten Ausdrücken gefundene grösste gemeinschaftliche Mass mit diesem gemeinschaftlichen Faktor multipliziert werden, um das grösste gemeinschaftliche Mass der gegebenen Grössen zu liefern.

So oft wir daher, der Regel gemäss, einen Rest als Divisor verwenden, dürfen wir ihm jeden einfachen Faktor, den er enthalten mag, herausstreichen. Hier gibt es keinen Vorbehalt wie im vorigen Falle: denn kein Theil eines solchen einfachen Faktors kann auch dem neuen Dividenden gemeinsam sein, welcher, eben als vormaliger Divisor, bereits von einfachen Faktoren befreit sein wird.

Und wenn überdiess das erste Glied eines solchen Restes negativ ist, dürfen wir, der Eleganz halber,

ehe wir ihn als neuen Divisor nehmen, die Vorzeichen aller seiner Glieder wechseln, was eben so viel ist, als ihn durch -1 dividiren. Diess kann nur die Vorzeichen innerhalb des grössten gemeinschaftlichen Masses beeinflussen.

Beispiel. Finde das grösste gemeinschaftliche Mass von:

$$2x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 8x^2 + 2x \text{ und } 3x^5 - 6x^3 + 3x.$$

Hier entfernt man aus dem ersten Ausdruck den Faktor $2x$ (der allen seinen Gliedern gemeinsam ist), und aus dem zweiten den Faktor $3x$, und reducirt die Ausdrücke auf: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ und $x^4 - 2x^2 + 1$. Nun haben aber $2x$ und $3x$ selbst einen gemeinsamen Faktor x : und es ist klar, dass die ursprünglichen Ausdrücke einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, den diese neuen Ausdrücke nicht haben; daher muss das grösste gemeinschaftliche Mass dieser, nachdem es gefunden, mit x multipliziert werden, um das grösste gemeinschaftliche Mass der gegebenen Ausdrücke zu liefern.

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^2 + 1 \overline{) x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1} \\ \underline{x^4 - 2x^2 + 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x \overline{) -4x^3 + 8x^2 - 4x} \\ \underline{-4x^3 + 8x^2 - 4x} \\ x^2 - 2x + 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \overline{) x^4 - 2x^2 + 1} \\ \underline{x^4 - 2x^3 + x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ 2x^3 - 4x^2 + 2x \end{array}$$

$$\underline{x^2 - 2x + 1}$$

$$\underline{x^2 - 2x + 1}$$

In diesem Beispiel wird der erste Rest durch Division von $-4x$ reduzirt, und da das grösste gemeinschaftliche Mass dieser zwei neuen Grössen: $x^2 - 2x + 1$ ist, so wird das der zwei gegebenen Grössen $x(x^2 - 2x + 1)$ oder $x^3 - 2x^2 + x$ sein.

Uebungsbeispiele XXII.

Das grösste gemeinschaftliche Mass zu finden von:

1) $x^2 + x - 2$ und $x^2 - 3x + 2$.

2) $2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$ und $6x^3 + 6x^2 - 6x - 6$.

3) $2y^3 - 10y^2 + 12y$ und $3y^4 - 15y^3 + 24y^2 - 24$.

- 4) $3x^3 + 3x^2 - 15x + 9$ und $3x^4 + 3x^3 - 21x^2 - 9x$.
 5) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ und $x^4 + x^3y + xy^3 - y^4$.
 6) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 4x - 4$ und $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 12x - 4$.

§. 55.

Finden wir, bei irgend einem Schritt unseres Verfahrens, dass das erste Glied des Dividenden nicht genau durch das erste des Divisors theilbar ist, dann dürfen wir, um Brüche und Quotienten zu vermeiden, den ganzen Dividenden mit solch einem einfachen Faktor multiplizieren, der sein erstes Glied theilbar machen wird.

Beispiel. Das grösste gemeinschaftliche Mass zu finden von:

$$6x^2y + 4xy^2 - 2y^3 \text{ und } 8x^3 + 4x^2y - 4xy^2.$$

Man entferne ihre einfache Faktoren $2y$ und $4x$ (und bemerke, dass diese den gemeinschaftlichen Faktor, 2 , enthalten); wir haben $3x^2 + 2xy - y^2$ und $2x^2 + xy - y^2$, und verfahren mit diesen Grössen wie folgt:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2xy - y^2 \\ 2 \\ \hline 2x^2 + xy - y^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6x^2 + 4xy - 2y^2 \quad (3) \\ 6x^2 + 3xy - 3y^2 \\ \hline y \mid xy + y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + y \mid 2x^2 + xy - y^2 \quad (2x - y) \\ \underline{2x + 2xy} \\ -xy - y^2 \\ \underline{-xy - y^2} \end{array}$$

Das grösste gemeinschaftliche Mass wird dann $2(x + y)$ sein, da offenbar das grösste gemeinschaftliche Mass von $2(3x^2 + 2xy - y^2)$ und $2x^2 + xy - y^2$ dasselbe sein wird wie das von $3x^2 + 2xy - y^2$ und $2x^2 + xy - y^2$, indem das bei der ersten eingeführte 2 nicht ein Faktor der zweiten Grösse sein kann, die nach §. 54 keinen einfachen Faktor haben wird.

Uebungsbeispiele XXIII.

Findet das grösste gemeinschaftliche Mass von

1) $4x^2 - 4x - 3$ und $6x^2 - 5x - 6$.

2) $10y^2 + 3y - 1$ und $8y^2 + 6y + 1$.

- 3) $3a^3 - a^2 - a - 1$ und $2a^3 - 3a^2 + 4a - 3$.
 4) $2y^3 - y^2 + y + 1$ und $3y^3 - 2y^2 + 2y + 1$.
 5) $x^3 - 8x + 3$ und $x^6 + 3x^5 + x + 3$.
 6) $5a^3 + 2a^2 - 15a - 6$ und $7a^3 + 4a^2 - 21a - 12$.
 7) $3x^4 - x^2y^2 - 2y^4$ und $10x^4 + 15x^3y - 10x^2y^2 - 15xy^3$.
 8) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ und $a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$.

§. 56.

Um die oben gegebene Regel zu beweisen, wird es zuerst nöthig sein, die Wahrheit folgender Behauptung darzuthun.

Wenn eine Grösse c ein gemeinschaftliches Mass für a und b ist, so wird sie es auch für die Summe oder Differenz irgend welches Vielfachen von a und b sein, wie $ma \pm nb$.

Es sei c in a p mal, und in b q mal enthalten, dann ist $a = pc$, und $b = qc$, und $ma \pm nb = mpc \pm nqc = (mp \pm nq)c$; das heisst, es ist c $mp \pm nq$ mal in $ma \pm nb$ enthalten, und c misst also $am \pm nb$.

Indem 6 z. B. 12 und 18 ohne Rest theilen wird, so wird es jede Zahlen theilen, wie $7 \cdot 12 + 5 \cdot 18$; $11 \cdot 12 - 3 \cdot 18$; 12 (oder $1 \cdot 12$) $+ 7 \cdot 18$; $5 \cdot 12 - 18$ etc., d. h. jede Zahl, die durch Addition oder Subtraktion beliebiger Vielfacher von 12 und 18 gefunden ist.

§. 57.

Die Regel zu begründen, mittelst deren das grösste gemeinschaftliche Mass zweier Ausdrücke gefunden wird.

Erstens, die zwei gegebenen, durch a und b bezeichneten Ausdrücke, haben keine von beiden einen einfachen Faktoren.

Gesetzt, a sei nicht von niedererem Grade als der andere; und nehmen wir an: a dividirt durch b habe den Quotienten p und den Rest c , b durch c den Quotienten q und den Rest d , etc.

b) a (p	546) 672 (1
<u>p b</u>	<u>546</u>
c) b (q	126) 546 (4
<u>q c</u>	<u>504</u>
d) c (r	42) 126 (3
<u>r d</u>	<u>126</u>

Nun sind nach §. 56 alle gemeinschaftlichen Masse von a und b auch Masse von a — p b oder c, und mithin gemeinschaftliche Masse von b und c; und umgekehrt, sind alle gemeinschaftlichen Masse von b und c auch Masse von p b + c oder a und folglich gemeinschaftliche Masse von a und b: hieraus erhellt, dass b und c genau dieselben gemeinschaftlichen Masse wie a und b haben.

In ähnlicher Weise kann gezeigt werden, dass c und d dieselben gemeinschaftlichen Masse wie b und c, und also dasselbe wie a und b haben.

Und so könnten wir fortfahren, wenn mehr Reste vorhanden wären, die Grössen a, b, c, d etc. werden kleiner und kleiner: doch sind sie immer so, dass a und b, b und c, c und d, etc., dieselben gemeinschaftlichen Masse haben.

Wenn aber d in c dividirt ohne Rest bleibt, dann ist d selbst die grösste Grösse, welche sowohl c und d theilt, das heisst, d ist das grösste der gemeinschaftlichen Masse von c und d, und ist also das grösste gemeinschaftliche Mass von a und b.

So sind in obigem Zahlenbeispiel die gemeinschaftlichen Theiler von 546 und 672 genau dieselben, wie diejenigen von 126 und 546, und diese sind wieder dieselben wie diejenigen von 42 und 126; es ist aber 42 ist grösstes gemeinschaftliches Mass von 42 und 126, und demnach das grösste gemeinschaftliche Mass von 126 und 546, und auch von 546 und 672.

§. 58.

Wenn eine Grösse eine andere als Divisor, ohne einen Rest, enthält, so sagt man: sie sei ein Vielfaches derselben; und ein gemeinschaftliches Vielfaches von zwei oder mehr Grössen ist eine Grösse, welche jede derselben ohne Rest enthält.

So ist $6x^3y$ ein gemeinschaftliches Vielfaches von $2x^2$, $3xy$, $6x^3$, und 1, und jede Grösse ist ein Vielfaches von jedem ihrer Masse.

Natürlich ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (kl. g. V.) zweier oder mehrerer Grössen der kleinst möglich gebildete Ausdruck, welcher jede derselben enthält.

§. 59.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Grössen zu finden.

Es mögen a und b die zwei Grössen vorstellen, d ihr grösstes gemeinschaftliches Mass, und es sei $a = pd$, $b = qd$, so dass p und q keinen gemeinschaftlichen Faktor haben werden. Dann wird die kleinste Grösse, welche p und q enthält, pq sein, und mithin wird die kleinste Grösse, welche pd und qd enthält, pqd sein, welches daher das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist, das zwischen a und b gesucht wird.

Da $pqd = \frac{pd \cdot qd}{d} = \frac{ab}{d}$, so ergibt sich, dass das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b gefunden werden kann, indem man ihr Produkt durch ihr grösstes gemeinschaftliches Mass dividirt, oder was in der Ausführung einfacher ist, indem man jedes derselben durch ihr grösstes gemeinschaftliches Mass dividirt und die Quotienten mit einander multipliziert.

Jedoch wird das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von zwei oder mehr Grössen gewöhnlich durch Musterung gebildet, und bei geringer Uebung macht dies keine Schwierigkeit, da wir nur die Faktoren, aus welchen sie bestehen, niederschreiben und jeden, der mehr als einmal vorkommen mag, weglassen dürfen; das Produkt derselben wird das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache sein.

Beisp. 1. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $2bx$, $6abxy$, $3acx$ zu finden. Hier sind die Faktoren $2bx$, $3ay$, c , und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist $6abcxy$.

Beisp. 2. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $2a^2(a+x)$, $4ax(a-x)$, $6x^2(a+x)$ zu finden.

Hier ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der einfachen Faktoren $12a^2x^2$, das der zusammengesetzten Faktoren ist $a^2 - x^2$; daher ist das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache $12a^2x^2(a^2 - x^2)$.

Sechstes Kapitel.

Brüche.

§. 60.

Ein Bruch ist eine Grösse, welche einen Theil oder Theile einer Einheit oder eines Ganzen vorstellt.

Er besteht aus zwei Gliedern, dem Zähler und dem Nenner, der erstere steht über dem letztern, mit einem Strich zwischen beiden.

Nun sind wir schon (§. 8) übereingekommen, ein solcher Ausdruck solle bedeuten: die obere Grösse werde durch die untere dividirt, und in Anbetracht dessen wird man jetzt einsehen, dass ein Bruch auch den Quotienten des durch den Nenner dividirten Zählers angibt.

Der Nenner meldet, in wie viel gleiche Theile die Einheit getheilt ist, und der Zähler, wie viel solche gleiche Theile weggenommen werden.

So bedeutet $\frac{a}{b}$: die Einheit ist in b gleiche Theile getheilt, von denen a Theile weggenommen sind.

Jede ganze Grösse kann als ein Bruch betrachtet werden, dessen Nenner 1 ist, d. h. a ist $\frac{a}{1}$.

§. 61.

Um einen Bruch mit einem Ganzen zu multiplizieren, können wir entweder den Zähler multiplizieren oder den Nenner durch dasselbe dividiren; und umgekehrt, um einen Bruch durch ein Ganzes zu dividiren, können wir entweder den Zähler dividiren oder den Nenner mit demselben multiplizieren.

Also ist $\frac{a}{b} \cdot x = \frac{a x}{b}$; denn in jedem der Brüche

$\frac{a}{b}$, $\frac{a x}{b}$, ist die Einheit in b gleiche Theile getheilt, und es werden x mal mehr Theile beim ersten als beim zweiten genommen, d. h. $\frac{a x}{b} = \frac{a}{b} \cdot x$:

ferner durch ähnlichen Schluss: $\frac{a x}{b} : x = \frac{a}{b}$.

Es ist ferner $\frac{a}{b} : x = \frac{a}{b x}$; denn in jedem der Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b x}$ wird dieselbe Anzahl von Theilen weggenommen, nur ist jeder der Theile beim letztern $\frac{1}{x}$ tel eines jeden beim erstern, da die Einheit im letztern Fall in x mal mehr Theile, als im erstern getheilt ist; es ist daher der letztere Bruch $\frac{1}{x}$ tel (der x te Theil)

des erstern, d. h. $\frac{a}{b x} = \frac{a}{b} : x$, und in ähnlicher Weise

$$\frac{a}{b x} \cdot x = \frac{a}{b}.$$

§. 62.

Wenn irgend ein Ausdruck mit einem und demselben Ausdruck sowohl multipliziert als dividirt wird, so wird sein Werth natürlich unverändert bleiben. Wird daher Zähler und Nenner eines Bruchs mit derselben Grösse sowohl multipliziert als auch dividirt, so wird sein Werth unverändert bleiben.

$$\text{Z. B. } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{a^2}{a \cdot b} = \text{etc.}, \text{ und } \frac{a^3 b}{a^2 b c} = \frac{a}{c} = \frac{a c}{c^2} = \text{etc.}$$

§. 63.

Da $a = \frac{a}{1}$ (§. 60), und daher a dividirt durch b $= \frac{a}{1} : b = \frac{a}{b}$ (§. 61) ist, so folgt, wie in §. 60 ausgesprochen, dass ein Bruch den Quotienten des Zählers durch den Nenner vorstellt.

In der That können wir $\frac{1}{b}$ (1 btel) von a Einheiten (oder $a : b$) erhalten, wenn wir den bten Theil von jeder der a Einheiten nehmen, und diess ist dasselbe, wie a solche Theile Einer Einheit; was (§. 60) mit $\frac{a}{b}$ ausgedrückt wird.

So ist, in der Arithmetik, 3 fl. : 4 oder $\frac{1}{4}$ von 3 fl., dasselbe wie $\frac{3}{4}$ von 1 fl., etc.

§. 64.

Um ein Ganzes in einen Bruch mit gegebenem Nenner zu verwandeln, multiplizire dasselbe mit dem gegebenen Nenner, und das Produkt wird der Zähler des gesuchten Bruches sein.

So ist a , als Bruch mit dem Nenner x ausgedrückt, $\frac{a x}{x}$, oder mit dem Nenner $b - c$, ist es $\frac{a b - a c}{b - c}$.

Die Richtigkeit dessen erhellt aus §. 62.

§. 65.

Die Vorzeichen aller Glieder sowohl im Zähler als im Nenner eines Bruchs können gewechselt werden, ohne dessen Werth zu verändern; z. B. $\frac{x^2 - 2ax - a^2}{3ax - x^2}$ ist gleichbedeutend mit $\frac{a^2 + 2ax - x^2}{x^2 - 3ax}$.

Diess ergibt sich auch aus §. 62, da das Verfahren darauf hinausläuft, sowohl Zähler als Nenner mit -1 zu multiplizieren.

§. 66.

Um einen Bruch auf seine kleinste Glieder zurückzuführen (zu reduzieren), dividire man Zähler und Nenner durch ihr grösstes gemeinschaftliches Mass.

$$\text{Beisp. 1. } \frac{a^2 x^2 y^2}{a^2 x y + a x y^2} = \frac{a^2 x^2 y^2}{a x y (a + y)} = \frac{a x y}{a + y}.$$

$$\text{Beisp. 2. } \frac{a^3 + x^3}{a^2 - x^2} = \frac{(a + x)(a^2 - ax + x^2)}{(a + x)(a - x)} = \frac{a^2 - ax + x^2}{a - x}.$$

$$\text{Beisp. 3. } \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x + 3)(x + 1)}{(x + 3)(x + 2)} = \frac{x + 1}{x + 2}.$$

Uebungsbeispiele XXIV.

Bringe auf die einfachste Form

$$1) \frac{axy + xy^2}{axy}$$

$$2) \frac{mx + x^2}{a^2 m + a^2 x}$$

$$3) \frac{4x^2 y^2}{2x^2 y + 2xy^2}$$

$$4) \frac{a^3(m^4 - m^2 n^2)}{m^3(am + an)}$$

$$5) \frac{6x^2 - 13xy + 6y^2}{10x^2 - 9xy - 9y^2}$$

$$6) \frac{3x^2 - 2x - 1}{4x^3 - 2x^2 - 3x + 1}$$

$$7) \frac{x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3}{x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3}$$

$$8) \frac{x^3 + 11x^2 + 30x}{9x^3 + 53x^2 - 9x - 18}$$

$$9) \frac{3x^3 + 4x^2 - 3x - 4}{2x^4 - 7x^2 + 5}$$

$$10) \frac{3a^4 - a^2 b^2 - 2b^4}{2a^4 + 3a^3 b - 2a^2 b^2 - 3ab^3}$$

§. 67.

Um Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner (Hauptnenner) zu bringen, multiplizire man den Zähler jedes einzelnen Bruchs mit allen Nennern, aus-

genommen seinem eigenen; hieraus ergibt sich der neue Zähler für den Bruch, und das Produkt aller Nenner liefert den Hauptnenner.

Die Richtigkeit dieser Regel ist leicht einzusehen, denn der Zähler und der Nenner jedes Bruches werden beide mit denselben Grössen multipliziert, nämlich mit den Nennern der andern Brüche, und daher wird sein Werth nicht geändert werden, obschon alle Brüche nun mit einem und demselben Nenner auftreten werden.

Beispiele. Bringe $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ auf einen gemeinschaftlichen Nenner.

Nun sind die Zähler $a \cdot c \cdot d = a c d$

$b \cdot b \cdot d = b^2 d$

$c \cdot b \cdot c = b c^2$

und der Nenner

$b \cdot c \cdot d = b c d$

und die verlangten Brüche sind: $\frac{a c d}{b c d}$, $\frac{b^2 d}{b c d}$, $\frac{b c^2}{b c d}$

§. 68.

Haben jedoch etliche von den ursprünglichen Bruchennennern gemeinschaftliche Faktoren, so wird obiges Verfahren die Brüche nicht mit ihrem kleinsten Haupt-Nenner geben. Derselbe wird, wie beim Zahlenrechnen, gefunden, indem man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Nenner bildet, und der, irgend einem der gegebenen Brüche zukommende Zähler wird erhalten werden, indem man dessen Zähler mit dem Faktor multipliziert, welcher aus der Division des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen durch seinen Nenner hervorgeht.

Beispiel. Bringe $\frac{a}{2bx}$, $\frac{c}{6abxy}$, $\frac{b}{3acx}$ auf gleichen Nenner.

Hier ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner $6abcxy$, die verlangten Brüche sind daher

$$\frac{3a^2cy}{6abcxy}, \frac{c^2}{6abcxy}, \frac{2b^2y}{6abcxy}.$$

§. 69.

Um Brüche zu addiren oder zu subtrahiren, bringe sie auf gleiche Benennung, addire oder subtrahire die Zähler zu einem neuen Zähler, und behalte den Haupt-Nenner bei.

Beisp. 1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{bcx + acy + abz}{abc}.$

Beisp. 2. Finde den Werth von $2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a - b}{a + b}.$

Antwort.

$$\frac{2(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) - (a - b)(a + b)}{a^2 - b^2} = \frac{2a^2 + 2ab - 2b^2}{a^2 - b^2}.$$

Uebungsbeispiele XXV.

1) $\frac{a}{3x} - \frac{a - x}{3(a + x)}$

2) $\frac{a}{3x} + \frac{a + x}{3(a - x)}$

3) $\frac{x}{x + y} - \frac{y}{x - y}$

4) $\frac{x - y}{x + y} + \frac{xy}{x^2 - y^2}$

5) $\frac{m}{a} - \frac{(mb - na)x}{a(a + bx)}$

6) $\frac{m}{a^2} + \frac{a - m}{a(a + m)}$

7) $\frac{1}{2(y - z)} + \frac{1}{2(y + z)} + \frac{y}{y^2 + z^2}$

8) $\frac{1}{2(a - z)} - \frac{1}{2(a + z)} - \frac{z}{a^2}.$

§. 70.

Um einen Bruch mit einem andern zu multiplizieren, multiplizire man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner.

Gesetzt, wir haben $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ zu multiplizieren, und es sei $\frac{a}{b} = x$, $\frac{c}{d} = y$; alsdann ist $a = bx$, $c = dy$, und $ac = bdx y$; woraus (wenn man jede Seite durch bd dividirt) $\frac{ac}{bd} = x \cdot y$, aber $xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, und $\frac{ac}{bd} =$

$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{\text{Produkt der Zähler}}{\text{Produkt der Nenner}}$. Hieraus ergibt sich offenbar die Richtigkeit der Regel.

Ähnlich können wir bei jeder beliebigen Anzahl von Brüchen verfahren.

Beisp. $\frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3(a+b)(a-b)}{2(c+d)(c-d)} = \frac{3(a^2-b^2)}{2(c^2-d^2)}$.

§. 71.

Um einen Bruch durch einen andern zu dividiren, kehre man den Divisor um, und verfare wie bei der Multiplikation.

Gesetzt, wir haben $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ zu dividiren: es sei $\frac{a}{b} = x$, $\frac{c}{d} = y$; dann ist $a = bx$, $c = dy$; hieraus $ad = bdx$, $bc = bdy$, und $\frac{ad}{bc} = \frac{bdx}{bdy} = \frac{x}{y}$; aber $\frac{x}{y} = x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, und $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$, woraus die Richtigkeit der Regel erhellt.

Beisp. $\frac{2a+3b}{c+d} : \frac{c-d}{2a-3b} = \frac{(2a+3b)(2a-3b)}{(c+d)(c-d)} = \frac{4a^2-9b^2}{c^2-d^2}$.

§. 72.

Oft können gemeinschaftliche Faktoren aus dem Zähler und Nenner entfernt (gestrichen) werden.

Beisp. 1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{cx}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Beisp. 2. $\frac{5ax}{3cy} \cdot \frac{xy+y^2}{x^2-xy} = \frac{5ax}{3cy} \cdot \frac{y(x+y)}{x(x-y)} = \frac{5a(x+y)}{3c(x-y)}$
 $= \frac{5ax+5ay}{3cx-3cy}$.

Beisp. 3. $\frac{x^2+xy}{x-y} : \frac{x^4-y^4}{(x-y)^2} = \frac{x^2+xy}{x-y} \cdot \frac{(x-y)^2}{x^4-y^4} = \frac{x}{x^2+y^2}$.

Uebungsbeispiele XXVI.

Die Werthe zu finden von:

$$1) \frac{2m}{a} \cdot \frac{3ax}{m^2} \cdot \frac{ma+mc}{ax+cx}$$

$$2) \frac{ma^2 - mc^2}{ax+cx} \cdot \frac{x^2}{ay-cy}$$

$$3) \left(x + \frac{x}{a}\right) : \left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$4) \left(x - \frac{1}{x}\right) : \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$5) \frac{ax}{(a-x)^2} \cdot \frac{a^2-x^2}{ab} \cdot \frac{ab-bx}{ax+x^2}$$

$$6) \frac{a}{bx} \cdot \left(b + \frac{bx}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{a+x}\right)$$

$$7) \left(c^2 - \frac{1}{z^2}\right) \cdot \frac{c^2 z^2 + cdz^2}{cz+1} \cdot \frac{z}{c^2-d^2}$$

$$8) \frac{x^4-b^4}{x^2-2bx+b^2} : \frac{x^2+bx}{x-b} \cdot \frac{x^5-b^2x^3}{x^4-2bx^3+b^2x^2}$$

§. 73.

Ein zusammengesetzter Bruch, d. h. einer, bei dem der Zähler und der Nenner, oder beide, Brüche sind, kann vereinfacht werden, wie folgt.

$$\text{Beisp. 1. } \frac{1 - \frac{x}{2}}{4x} = \frac{\frac{2-x}{2}}{\frac{4x}{1}} = \frac{2-x}{2} \cdot \frac{1}{4x} = \frac{2-x}{8x}.$$

Hiebei bemerke man: Wenn ein zusammengesetzter Bruch in die Form von einem $\frac{\text{Bruch}}{\text{Bruch}}$ gebracht ist, so wird dafür der einfache Ausdruck gefunden, wenn man das Produkt der zu oberst und zu unterst stehenden Grössen, oder die der äusseren Glieder als Zähler, und das der zwei mittleren oder die Mittelglieder als Nenner nimmt; und jeder Faktor darf aus einem der äusseren gestrichen werden, wenn er auch aus einem der mittleren gestrichen wird,

$$\text{Beispiel 2. } \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2x}{1}}{\frac{3x-1}{3}} = \frac{6x}{3x-1}.$$

$$\text{Beispiel 3. } \frac{5 - \frac{1}{4}x}{x + 1\frac{1}{3}} = \frac{\frac{20-x}{4}}{\frac{3x+4}{3}} = \frac{60-3x}{4(3x+4)}.$$

Uebungsbeispiele XXVII.

Zu vereinfachen

$$1) \frac{1 - \frac{2}{3}x}{3}$$

$$2) \frac{x}{3 - \frac{2}{3}x}$$

$$3) \frac{2 - x}{x + 1\frac{1}{2}}$$

$$4) \frac{3x + 1\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}}$$

$$5) \frac{2\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}{\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{3}}$$

$$6) \frac{x - 3\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}$$

$$7) \frac{x - \frac{2}{5}(x - 2)}{5}$$

$$8) \frac{2x + \frac{3}{4}(1 - 3x)}{1\frac{1}{2}}$$

$$9) \frac{1\frac{1}{3} + \frac{3}{2}(x - 1)}{\frac{2}{3}(x + 1) - 2\frac{1}{2}}$$

$$10) \frac{1\frac{2}{3} - \frac{1}{2}(x + 2)}{\frac{1}{2}(x - 1)}$$

§. 74.

Die folgenden Resultate sollten besonders gemerkt werden.

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dann ist

$$1: \frac{a}{b} = 1: \frac{c}{d} \text{ oder } \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (1),$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \text{ oder } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (2),$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1, \text{ oder } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (3),$$

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1, \text{ oder } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (4),$$

Es ergibt sich hieraus

$$\frac{a+b}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c+d}{d} \cdot \frac{d}{c}, \text{ oder } \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad (5),$$

$$\text{und } \frac{a+b}{b} \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{c+d}{d} \cdot \frac{d}{c-d}, \text{ oder } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad (6).$$

Jedes dieser Resultate kann nach (1) umgekehrt oder nach (2) versetzt werden, z. B.

$$\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a \pm b}{c \pm d}, \quad \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a - b}{c - d}, \text{ etc.}$$

Dies heisst also: Wenn irgend zwei Brüche gleich sind, dürfen wir durch Addition oder Subtraktion auf jede Weise Zähler und Nenner des einen Bruchs verbinden, vorausgesetzt, dass wir dasselbe bei dem andern thun.

§. 75.

Die obigen Resultate können noch weiter verallgemeinert werden.

Denn wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ist auch $\frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{d}$,

oder $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$; und daher nach dem, was oben gezeigt wurde,

$$\frac{ma \pm nb}{ma} = \frac{mc \pm nd}{mc}, \text{ woraus } \frac{ma \pm nb}{a} = \frac{mc \pm nd}{c}, \text{ und}$$

$$\frac{ma \pm nb}{pa} = \frac{mc \pm nd}{pc};$$

$$\text{ebenso } \frac{ma \pm nb}{pb} = \frac{mc \pm nd}{pd}, \frac{ma \pm nc}{pa} = \frac{mb \pm nd}{pd}, \frac{ma \pm nc}{pc} = \frac{mb \pm nd}{pd},$$

$$\frac{ma \pm nb}{ma - nb} = \frac{mc \pm nd}{mc - nd}, \frac{ma \pm nb}{mc \pm nd} = \frac{ma - nb}{mc - nd} \text{ etc.}$$

$$\text{Ferner, da } \frac{ma \pm nb}{a} = \frac{mc \pm nd}{c}, \text{ und } \frac{pa \pm qb}{a} = \frac{pc \pm qd}{c},$$

$$\text{so ist auch } \frac{ma \pm nb}{pa \pm qb} = \frac{mc \pm nd}{pc \pm qd}, \text{ etc.}$$

Hieraus sehen wir, dass die Behauptung in §. 74 über alle möglichen Vielfache der Zähler und Nenner der Brüche richtig ist.

§. 76.

Ferner, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$, $\frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3}$ etc.,

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}.$$

Hieraus ergeben sich die vorhergehenden Resultate anstatt mit a, b, c, d mit a^n, b^n, c^n, d^n .

§. 77.

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, so ist auch

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{ma+nc+pe}{mb+nd+pf},$$

denn, gesetzt es sei $\frac{a}{b} = x = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; so ist $a = bx$, $c = dx$, $e = fx$;

daher $a + c + e = bx + dx + fx = (b + d + f)x$; folglich x

oder $\frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f}.$

Ferner $ma = mbx$, $nc = ndx$, $pe = pfx$, folglich $ma + nc + pe = (mb + nd + pf)x$, und x oder $\frac{a}{b} = \frac{ma+nc+pe}{mb+nd+pf}.$

Ebenso auch $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = \frac{e^n}{f^n}$, und hieraus $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a^n + c^n + e^n}{b^n + d^n + f^n}$
 $= \frac{ma^n + nc^n + pe^n}{mb^n + nd^n + pf^n}.$

NB. Die obige Beweisführung wird offenbar gültig sein, wie viel gleicher Brüche auch vorhanden sein mögen.

Siebentes Kapitel.

Einfache Gleichungen (Fortsetzung).

§. 78.

Zusammengesetzte Brüche in einer Gleichung müssen zuerst nach §. 73 reduziert werden; enthalten dann einzelne Nenner sowohl einfache als zusammengesetzte Faktoren, so ist es am besten, sie zuerst von den einfachen Faktoren und dann von jedem zusammengesetzten Faktor der Reihe nach zu befreien. Hierbei vereinfache man soviel als möglich nach jeder Multiplikation.

Beispiel, $\frac{25 - \frac{1}{3}x}{x+1} + \frac{16x + 4\frac{1}{5}}{3x+2} = 5 + \frac{23}{x+1}.$

Wenn wir hier zuerst die zusammengesetzten Brüche vereinfachen, bekommen wir:

$$\frac{75 - x}{3(x + 1)} + \frac{80x + 21}{5(3x + 2)} = 5 + \frac{23}{x + 1}.$$

Dann durch Multiplikation mit 15,

$$\frac{375 - 5x}{x + 1} + \frac{240x + 63}{3x + 2} = 75 + \frac{345}{x + 1}; \text{ hieraus,}$$

wenn man mit $x + 1$ multipliziert:

$$375 - 5x + \frac{240x^2 + 303x + 63}{3x + 2} = 75x + 75 + 345,$$

$$\text{und } \frac{240x^2 + 303x + 63}{3x + 2} = 75x + 5x + 75 + 345 - 375$$

$$= 80x + 45;$$

$$\text{daher } 240x^2 + 303x + 63 = 240x^2 + 295x + 90,$$

$$\text{und } 8x = 27, \text{ oder } x = 3\frac{3}{8}.$$

Uebungsbeispiele. XXVIII.

$$1) \frac{x - 2}{3} - \frac{1 - \frac{1}{2}x}{6} = 2\frac{1}{2}.$$

$$2) \frac{3}{2(x + 1)} = 4 - \frac{4x + 3}{x + 3}.$$

$$3) \frac{4x + 3}{3(x + 3)} + \frac{1}{x + 1} = 1\frac{1}{3}.$$

$$4) \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{2(x - 3)} + \frac{1}{2x - 1}.$$

$$5) \frac{2 - 2\frac{2}{3}x}{3 - x} + \frac{1}{1 - x} = 2\frac{2}{3}.$$

$$6) \frac{(x + 1\frac{1}{2})x}{2x + 1} + \frac{1}{6x} = \frac{x + 1}{2}.$$

$$7) \frac{6(x + 4)}{3x + 5} = \frac{6(x + 5)}{2x + 3} - 1.$$

$$8) \frac{6x + 13}{15} = \frac{2x}{5} + \frac{1 + \frac{3}{5}x}{x - 5}.$$

$$9) \frac{3x - 3\frac{1}{2}}{2x - 5} - (4\frac{1}{5} - \frac{3}{5}x) = \frac{2x + 4\frac{1}{3}}{3\frac{1}{3}}.$$

$$10) \frac{x + 1\frac{1}{2}}{3} - \frac{10 - x}{3\frac{2}{3}} = \frac{3 - \frac{2}{3}}{11}x.$$

§. 79.

Im Nachstehenden sind angehängte Aufgaben in einfachen Gleichungen, die etwas mehr Schwierigkeit darbieten, als die, welche wir früher vorgetragen haben.

Beisp. 1.) Eine gewisse Zahl besteht aus zwei Ziffern, deren Unterschied 3 ist; wenn die Ziffern vertauscht werden, so wird die neugebildete Zahl $\frac{4}{7}$ der ersten sein: die ursprüngliche Zahl zu finden.

Setze x = der kleineren Ziffer, so ist $x + 3$ die grössere: da aber der Werth einer 2ziffrigen Zahl = 10mal die erste Ziffer + die zweite Ziffer (z. B. $67 = 10 \cdot 6 + 7$), so ist die fragliche Zahl $10(x + 3) + x$, ebenso ist die durch Umkehren derselben Ziffern gebildete Zahl $= 10x + (x + 3)$; daher im vorliegenden Fall $10x + (x + 3) = \frac{4}{7} \{ 10(x + 3) + x \}$.

Hieraus $x = 3$, $x + 3 = 6$, und die gesuchte Zahl ist 63.

Beisp. 2.) A kann eine Arbeit in 10 Tagen verrichten. Nachdem er 4 Tage daran thätig war, wird B geschickt, um ihm zu helfen, und sie vollenden dieselbe mit einander in 2 Tagen. In welcher Zeit hätte B das Ganze geleistet?

Es sei x = der Anzahl Tage, die B gebraucht haben würde, und W bedeute das Werk:

dann sind $\frac{W}{10}$, $\frac{W}{x}$ die Theile der Arbeit, welche A, B in Einem Tage gefertigt hätten; in 4 Tagen daher fertigt A $\frac{4W}{10}$ und in 2

Tagen liefern A und B zusammen $\frac{2W}{10} + \frac{2W}{x}$, daher

$$\frac{4W}{10} + \frac{2W}{10} + \frac{2W}{x} = W.$$

Offenbar hätten wir im obigen W durchweg auslassen können oder die Einheit nehmen, um das Werk darzustellen, und zwar:

A, B liefern je $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{x}$ des Werks in Einem Tag, und wenn wir daher geradeso wie vorhin schliessen:

$$\frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{x} = \text{dem ganzen Werk} = 1.$$

(Bei allen solchen Fragen sollte der Schüler sich merken, wenn Jemand $\frac{m}{n}$ tel einer Arbeit in 1 Tag liefert, wird er $\frac{1}{n}$ tel derselben in $\frac{1}{m}$ tel eines Tages, und daher das ganze Werk in $\frac{n}{m}$ Tagen fertigen.)

Z. B. wenn er $\frac{3}{7}$ in Einem Tag leistet, wird er $\frac{1}{7}$ in $\frac{1}{3}$ eines Tages, und also das Ganze oder $\frac{7}{7}$ in $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ Tagen fertigen.)

Beisp. 3.) Ein Wasserbehälter kann in einer halben Stunde durch eine Röhre A gefüllt, und in 20 Minuten durch eine andere Röhre B entleert werden: nachdem A 20 Minuten offen gewesen ist, wird auch B 12' lang geöffnet; hierauf wird A geschlossen, und B bleibt noch weitere 5' offen; und nun sind 13 Ohm in dem Wasserbehälter, wie viel wird der volle enthalten?

Es sei $x =$ der Zahl der Ohm, welche den Behälter ausfüllen würden: dann liefert ihm A in 1 Minute $\frac{1}{30} x$ Ohm, und B lässt $\frac{1}{20} x$ Ohm heraus; aber A ist 32 Minuten lang und B 17 Minuten lang geöffnet; folglich

$$\frac{32}{30} x - \frac{17}{20} x = 13, \text{ hieraus } x = 60 \text{ Ohm.}$$

Beisp. 4.) Die Zeit zwischen zwei und 3 Uhr zu finden, da der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr genau zu einander entgegengesetzt stehen.

Es sei $x =$ der Anzahl der Minuten, um welche der Stundenzeiger seit 2 Uhr vorgerückt ist, dann wäre $12x =$ der Zahl der Minuten, welche der Minutenzeiger vorgerückt ist, da er 60 Minuten durchstreift, während der andere 5 Minuten; in unserem Falle aber wird der Minutenzeiger $(10 + x) + 30 = x + 40$ Minuten fortgeschritten sein, daher $12x = x + 40$, woraus $x = 3\frac{7}{11}$,

und die Zeit ist 2 Uhr $43\frac{7}{11}$ Minuten.

Uebungsbeispiele XXIX.

1. Ein Mann kann eine Arbeit in 10 Stunden fertigen, welche er mit Beihilfe seines Sohnes in 8 Stunden vollenden könnte; in welcher Zeit würde sein Sohn dieselbe allein leisten?

2) A und B können ein Kornfeld mit einander in 6 Stunden abmähen: A selbst mäht zwei Drittel desselben in 6 Stunden ab: wieviel Stunden wird B noch brauchen, um fertig zu werden?

3) Eine zweistellige Zahl, deren zweite Ziffer 3 ist, zu finden, so dass ihr um 5 vermehrtes Doppeltes die umgekehrten Ziffern geben wird.

4) Es sind 2 Pferde und ein Sattel mit einander £ 50 werth. Der Preis des einen Pferds ist £ 30; aber sammt dem Sattel ist es gerade doppelt so viel werth, als das andere Pferd ohne Sattel; den Werth des Sattels zu finden.

5) Ein Mann und seine Frau nahmen zusammen 23 s. ein, der Mann hatte 5 Tage länger als die Frau gearbeitet. Ihr Lohn war beziehungsweise 16 d. (pence) und 1 s. per Tag. Wie viel Tage arbeitete der Mann?

6) Ein Spieler verlor auf einen Einsatz ein Drittel seines Geldes und noch 2 fl.; bei einem zweiten verlor er halb soviel, als ihm blieb, und er hat nur noch 5 fl. bei sich. Wie viel hatte er anfangs?

7) Ein Marktweib kaufte Eier 2 Stück um 1 penny. Sie verkaufte die Hälfte, 3 um 2 pence, und den Rest um 3 s. und gewann noch obendrein 1 s. 4 d. Wie viele Eier kaufte sie?

8) Ein Behälter kann durch 2 Röhren A und B gefüllt werden, durch die eine in 20 Minuten, durch die andere in 30 Minuten. Wie lange muss A allein offen sein, damit, wenn beide zugleich geöffnet werden, der Behälter in weiteren 10 Minuten gerade voll werde?

9) Eine Börse, welche 64 Geldstücke in halben Kronen und Schillingen enthält, hat einen Werth von £ 75. Wie viel Stücke waren es von jeder Sorte?

10) 78 Thaler sind unter A, B und C so zu theilen, dass A um die Hälfte mehr als B, und B um ein Drittel mehr als C bekomme.

11) A und B können mit einander eine gewisse Arbeit in 3 Tagen fertigen. A arbeitet 2 Tage allein, und hierauf vollenden sie dieselbe mit einander in 2 weiteren Tagen. In welcher Zeit könnten sie dieselbe einzeln verrichten?

12) A begegnete drei Bettlern, und gab dem einen von ihnen ein Drittel des Gelds in seiner Börse, dem zweiten ein Drittel des Rests, und dem dritten um ein Drittel mehr als er dem zweiten

gegeben hatte. Er findet nunmehr 7 s. 6 d. in seiner Börse. Wieviel hatte er anfangs?

Zusammengehörige Gleichungen des ersten Grades.

§. 81.

Wenn Eine Gleichung zwei unbekannte Grössen enthält, so gibt es für diese unendlich viel Werthepaare, durch welche ihr genügt werden kann.

Z. B. wenn wir in $x = 10 - 2y$ dem y irgend einen Werth geben, so werden wir für x einen entsprechenden Werth erhalten; durch diese Werthpaare wird der Gleichung natürlich genügt: nehmen wir z. B. $y = 1$, so werden wir $x = 10 - 2 = 8$ erhalten; für $y = 2$, $x = 6$.

Daher lässt Eine Gleichung zwischen zwei unbekannten Grössen eine unendliche Zahl von Lösungen zu; haben wir aber ebensoviele verschiedene Gleichungen, als Grössen vorhanden sind, so wird die Zahl der Lösungen eine begrenzte sein.

Während also die Gleichungen $x = 10 - 2y$, $4x + 4 = 3y$, jede für sich betrachtet, durch eine Unzahl von Werthpaaren für x und y befriedigt werden, wird nun Ein beiden gemeinsames Paar, nemlich $x = 2$, $y = 4$ gefunden werden; letztere sind deshalb die Wurzeln des Gleichungspaares $x = 10 - 2y$ und $4x + 4 = 3y$.

Derartige Gleichungen, welchen durch ein und dasselbe Werthpaar (oder Werthpaare) für x und y genügt wird, heisst man zusammengehörige Gleichungen.

Wenn drei unbekannte vorkommen, so müssen drei Gleichungen vorhanden sein u. s. w.; und überdiess müssen diese Gleichungen alle von einander verschieden sein, d. h. alle müssen verschiedene Beziehungen zwischen den unbekannten Grössen aussprechen.

Hätten wir z. B. die Gleichung $x = 10 - 2y$, so wäre es von keinem Werth, mit ihr die Gleichung $2x = 20 - 4y$ (welche

durch ihr blosses Verdoppeln entstanden ist), oder eine andere, wie diese unmittelbar aus der ersten abgeleitete, zu verbinden; denn diess drückt ja keine neue Beziehung zwischen x und y aus, sondern sagt wiederholt das Vorige in anderer Form.

§. 81.

Gewöhnlich gibt man 3 Methoden zur Lösung zusammen gehöriger Gleichungen mit zwei Unbekannten an; allein bei jeder ist der Endzweck derselbe, nämlich die 2 Gleichungen auf eine solche Weise zu combiniren, dass aus dem Resultat Eine Grösse ausgeschieden, oder, wie die Redensart lautet, eliminiert, und so eine Gleichung mit nur Einer Unbekannten gewonnen wird.

§. 82.

Erste Methode (Additions- oder Subtraktionsmethode).

Multiplizire, wo möglich, die eine Gleichung mit einer solchen Zahl, welche den Coefficienten von x oder y gleich dem in der andern Gleichung machen wird; hierauf addire oder subtrahire man die beiden Gleichungen, je nachdem diese gleichen Grössen verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben, diese Glieder werden einander aufheben und die Elimination wird hergestellt sein.

$$\begin{array}{l} \text{Beisp. 1. } 4x - y = 7 \quad \{ (1) \\ \quad \quad 3x + 4y = 29 \quad \{ (2) \end{array}$$

hier ist $3x + 4y = 29$, und wenn man (1) mit 4 multipliziert,

$$16x - 4y = 28, \text{ folglich wenn man addirt:}$$

$$\hline 19x = 57, \text{ und daher } x = 3 \text{ und aus (1):}$$

$$y = 4x - 7 = 12 - 7 = 5.$$

Manchmal können wir durch Multiplikation von nur einer der Gleichungen die Coefficienten nicht gleich machen, sondern wir werden beide durch bestimmte Zahlen multiplizieren müssen, die im gegebenen Falle leicht zu ersehen sind.

Beisp. 2.

$$2x + 3y = 4 \quad (1)$$

$$3x - 2y = -7 \quad (2)$$

Multiplizire (1) mit 3

$$6x + 9y = 12$$

" (2) mit 2

$$6x - 4y = -14, \text{ so ist}$$

wenn man subtrahirt

$$13y = 26, \text{ und also } y = 2,$$

und aus (1) $2x = 4 - 3y = 4 - 6 = -2$, daher $x = -1$.

§. 83.

Zweite Methode (Substitutionsmethode).

Aus einer der Gleichungen bestimme man eine der unbekannten Grössen in Funktion der andern, und setze den Werth für dieselbe in die andere Gleichung.

Beisp. 3.

$$7x + \frac{1}{5}(2x + 4) = 16 \quad (1)$$

$$3y - \frac{1}{4}(x + 2) = 8 \quad (2)$$

$$\text{oder wenn man reduzirt} \quad 35x + 2y = 76 \quad (1)$$

$$12y - x = 34 \quad (2).$$

Aus (2) folgt $x = 12y - 34$, und folglich (1)

$$35(12y - 34) + 2y = 76,$$

woraus $y = 3$, und mithin $x = 2$.

§. 84.

Dritte Methode (Combinationsmethode).

Bei beiden Gleichungen drücke ein und dieselbe unbekannte Grösse in Funktion der andern aus, und setze diese Werthe einander gleich.

Beisp. 4.

$$5x - \frac{1}{4}(5y + 2) = 32 \quad (1)$$

$$3y + \frac{1}{3}(x + 2) = 9 \quad (2), \text{ oder}$$

$$\text{wenn man reduzirt:} \quad 20x - 5y = 130 \quad (1)$$

$$9y + x = 25 \quad (2).$$

In (1) ist $y = \frac{1}{5}(20x - 130)$, und in (2): $y = \frac{1}{9}(25 - x)$,daher $\frac{1}{5}(20x - 130) = \frac{1}{9}(25 - x)$, woraus $x = 7$, $y = 2$.

NB. Die erste dieser Methoden ist im Allgemeinen vorzuziehen, die zweite aber mag mit Vorthail benützt werden, so oft in einer der Gleichungen entweder x oder y einen Einser als Coefficienten hat.

Zusatz I.

Als vierte Methode wird oft die Bézout'sche (oder französische) angegeben.

Diese fällt aber im Wesentlichen mit der ersten zusammen, indem der Faktor, womit hier nur die eine Gleichung multipliziert wird, den Coefficienten eines ihrer Unbekannten gleich dem Coefficienten derselben Unbekannten in der zweiten Gleichung macht.

$$\text{Beisp. 5.} \quad \begin{array}{l} mx + ny = c \\ \text{und } m'x + n'y = c' \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\}$$

Man multiplizire die eine Gleichung mit einem noch unbestimmten Faktor k :

$$\begin{array}{l} kmx + kny = ck \\ m'x + n'y = c' \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{und subtrahire hievon die zweite,} \\ \text{so hat man} \end{array} \right\}$$

(A) $(km - m')x + (kn - n')y = ck - c'$; hierauf setze man den einen Coefficienten, z. B. $km - m' = 0$,

$$\text{so ist } k = \frac{m'}{m}$$

und substituire diesen Werth in A), so erhält man

$$\left(\frac{m'n}{m} - n' \right) y = c \frac{m'}{m} - c'$$

$$\text{und } y = \frac{cm' - c'm}{m'n - mn'}$$

Dasselbe Resultat hätte man erhalten, wenn man die Gleichung (1) mit $\frac{m'}{m}$ (dem Quotienten der Coefficienten der beiden x) multipliziert und (2) von dieser neuen Gleichung subtrahirt hätte.

$$\text{Beisp. 6.} \quad \begin{array}{l} 7x + 3y = 56 \\ 12x - 7y = 11 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\}$$

(1) multipliziert, und dann (2) subtrahirt

$$\begin{array}{l} 7mx + 3my = 56m \\ 12x - 7y = 11 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

$$(A) \quad \frac{(7m - 12)x + (3m + 7)y = 56m - 11}{7m - 12 = 0} \quad \text{so ist:}$$

$$m = \frac{12}{7}$$

Aus (A) $\left(3 \cdot \frac{12}{7} + 7\right) y = 56 \cdot \frac{12}{7} - 11$

$$y = 7$$

und aus (1) $x = 7.$

Dasselbe aber nach Methode 1. Man multiplizire die erste Gleichung mit $\frac{12}{7}$, so kommt

$$12x + \frac{36}{7}y = 96$$

subtrahire

$$12x - 7y = 11$$

so kommt: $\frac{85}{7}y = 85$

$$\text{oder } y = 7.$$

Zusatz II.

Endlich wollen wir ein (in der höhern Geometrie übliches) Schluss-Verfahren notiren.

Man bringe jede der gleichzeitigen Gleichungen des ersten Grads durch Ordnen nach x und y in die Form:

$$mx + ny = c$$

$$m'x + n'y = c',$$

so erhalten wir durch eine der vier Methoden:

$$x = \frac{cn' - c'n}{mn' - m'n}.$$

$$\text{und } y = \frac{c'm - cm'}{mn' - m'n}.$$

Man sieht, die Nenner in beiden Ausdrücken sind identisch.

Denken wir uns die Coefficienten der Unbekannten und die der von x und y freien Gliedern (die Constanten) besonders herausgesetzt, so ist, wenn die Gleichungen wie oben geordnet sind,

der Zähler bei x $cn' - c'n$ $\left(\begin{array}{cc} m & n \\ m' & n' \end{array} \begin{array}{c} c \\ c' \end{array} \right)$

der Zähler bei y $c'm - cm'$ $\left(\begin{array}{cc} m & n \\ m' & n' \end{array} \begin{array}{c} c \\ c' \end{array} \right)$

der Nenner bei x u. y $mn' - m'n$ $\left(\begin{array}{cc} m & n \\ m' & n' \end{array} \begin{array}{c} c \\ c' \end{array} \right)$

Vergleicht man die Aufeinanderfolge der Coefficienten, so ergibt sich ein Gesetz, das uns, nach dem Ordnen der Gleichungen, auf Einen Schlag die Werthe von x und y ansetzen lässt.

Beisp. 7.
$$\begin{cases} 7x + 3y = 56 \\ 12x - 7y = 11 \end{cases}$$

Unmittelbar folgt:

$$x = \frac{56 \cdot -7 - 11 \cdot 3}{7 \cdot -7 - 12 \cdot 3} = \frac{-392 - 33}{-49 - 36} = \frac{-425}{-85} = 5$$

$$y = \frac{11 \cdot 7 - 56 \cdot 12}{7 \cdot -7 - 12 \cdot 3} = \frac{-595}{-85} = 7.$$

Beisp. 8.
$$\begin{aligned} bcx &= cy - 2b \\ b^2y + \frac{a(c^3 - b^3)}{bc} &= \frac{2b^3}{c} + c^3x. \end{aligned}$$

Werden die Gleichungen nach x und y geordnet, so:

$$\begin{cases} bcx - cy = -2b \\ c^3x - b^2y = \frac{a(c^3 - b^3) - 2b^4}{bc} \end{cases}$$

Hieraus erhält man unmittelbar:

$$x = \frac{+2b^3 + \frac{ac^3 - ab^3 - 2b^4}{b}}{-b^3c + c^4} = \frac{a}{bc},$$

$$\text{und } y = \frac{a(c^3 - b^3) - 2b^4 + 2bc^3}{-b^3c + c^4} = \frac{a + 2b}{c}.$$

§. 85.

Zusammengehörige Gleichungen mit drei unbekannten Grössen werden gelöst, indem man eine derselben mittelst irgend eines Paares der Gleichungen eliminirt und wieder dieselbe Grösse mittelst eines andern Paares: auf diese Weise werden wir 2 Gleichungen bekommen, welche ein und dieselben zwei unbekannten Grössen enthalten. Diese können nach den vorhergehenden Regeln aufgelöst werden.

Aehnlich wird verfahren bei Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten.

Beispiel 1.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 & (1) \\ 2x - 3y + z = 1 & (2) \\ 3x - y + 2z = 9 & (3). \end{cases}$$

$$\text{Aus (1)} \quad 2x - 4y + 6z = 4$$

$$(2) \quad 2x - 3y + z = 1$$

$$\quad \quad \quad - y + 5z = 3 \quad (\alpha)$$

$$\text{Ferner aus (1)} \quad 3x - 6y + 9z = 6$$

$$(3) \quad 3x - y + 2z = 9$$

$$\text{daher} \quad - 5y + 7z = - 3 \quad (\beta)$$

$$\text{aber} \quad - 5y + 25z = 15 \quad (\alpha)$$

$$\text{woraus} \quad - 18z = - 18, \text{ und } z = 1.$$

$$\text{Daher aus } (\alpha) \quad y = 5z - 3 = 2, \text{ und aus (1)} \quad x = 2 + 2y - 3z = 8$$

Uebungsbeispiele XXX.

$$1) \quad 5x + 7y = 43 \quad \left\{ \right.$$

$$3x + y = 13 \quad \left\{ \right.$$

$$3) \quad 7x - 3y = 0 \quad \left\{ \right.$$

$$2x + 5y = 41 \quad \left\{ \right.$$

$$5) \quad x + 2y + 3 = 0 \quad \left\{ \right.$$

$$2x + 3y + 4 = 0 \quad \left\{ \right.$$

$$7) \quad x + 1 = \frac{9}{2}y \quad \left\{ \right.$$

$$4y - x = \frac{5}{6} \quad \left\{ \right.$$

$$9) \quad x - y + z = 6 \quad \left\{ \right.$$

$$3y - x + z = 12 \quad \left\{ \right.$$

$$x + y - 9z = 0 \quad \left\{ \right.$$

$$11) \quad 3x - 2y + z = 4 \quad \left\{ \right.$$

$$2x - 3y + 2z = 3 \quad \left\{ \right.$$

$$2x - y + \frac{1}{4}z = 2 \quad \left\{ \right.$$

$$2) \quad 3x - 2y = 11 \quad \left\{ \right.$$

$$y + 2x = 12 \quad \left\{ \right.$$

$$4) \quad x + y = 7 \quad \left\{ \right.$$

$$(x+2)(y-2) = xy - 2 \quad \left\{ \right.$$

$$6) \quad 2x = 3y \quad \left\{ \right.$$

$$y + x - 7 = 2(y - x) \quad \left\{ \right.$$

$$8) \quad \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}y + 20 \quad \left\{ \right.$$

$$x + \frac{3}{5}(x+y) = \frac{3}{4}(2y-x) + 105 \quad \left\{ \right.$$

$$10) \quad x + 2y = z \quad \left\{ \right.$$

$$y - 2z = x + 3 \quad \left\{ \right.$$

$$x + y + z = 4 \quad \left\{ \right.$$

$$12) \quad x - 1 = 2(y - 2) \quad \left\{ \right.$$

$$y - 1 = 3(z - 2) \quad \left\{ \right.$$

$$z - 1 = x + y + 1 \quad \left\{ \right.$$

Uebungsbeispiele XXXI.

1) Eine Rechnung wurde in 64 Geldstücken, halben Kronen und Schillingen bezahlt, und der Werth der erstern war um die Hälfte grösser, als der der letztern. Wie viel Stücke waren von jeder Sorte vorhanden.

2) Jemand kaufte zwei Stücke Tuch um £ 39. 10 s., das eine zu 5 s. und das andere zu 4 s. 9 d. die Elle. Er verkaufte sie jedes mit einem Nutzen von 3 d. die Elle und gewann noch obendrein £ 2. Wie viele Ellen hielt jedes Stück?

3) A und B spielen um Nüsse, A gewinnt von B ein Drittel seines Vorraths und hat nun 20 Nüsse; hierauf gewinnt B von A

wieder ein Viertel dessen, was sie mit einander haben, und hat nun 15 Nüsse. Wie viel hatte jeder zuerst?

4) Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, deren Summe 8 ist. Wird 18 von der Zahl weggenommen, so werden ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung erscheinen. Dieselbe zu finden.

5) Ein Landwirth verpachtet für £ 210 ein Gut von 160 Acres, das Bauland wird zu 30 s. per Acre und das Weideland zu 25 s. gerechnet. Wie viel Acres eines jeden enthielt es?

6) Ich kaufte 3 Ochsen und 10 Schafe um 54 Karolin: für einen Ochsen hätte ich 8 Schafe haben können, und noch 1 Karolin dazu. Was war der Preis eines jeden?

7) Ein Schnellzug führte beim Abgang 30 Passagiere erster, und 50 zweiter Klasse, und bei der Rückkehr 40 erster und 70 zweiter Klasse. Die Einnahmen bei der Rückreise überstiegen die beim Abgang um £ 21, und die Fahrtaxe erster Klasse war um die Hälfte grösser als die zweiter Klasse. Die zwei Fahrtaxen zu finden.

8) A und B fangen Geschäfte mit verschiedenen Summen an, A gewinnt 1500 fl., B verliert 500 fl., und nun ist das Kapital des A um die Hälfte grösser, als das des B. Wenn aber A 1000 fl. gewonnen und B 500 fl. verloren hätte, so würde das Kapital des A um ein Drittel grösser, als das des B gewesen sein. Die Summen zu finden, mit denen sie anfangen.

9) Ein Spezereihändler kaufte Thee um 10 Guineen, theils um 4 s., theils um 4 s. 6 d. das Pfund. Beim Verkauf löst er bezüglich 4 s. 9 d. und 5 s. 6 d. per Pfund und gewann noch zu all diesem £ 2. 2 s. 6 d. Wie viel Pfund kaufte er von jeder Sorte.

10) Drei Zahlen A, B, C zu finden, deren Summe 20 ist, und wobei A die halbe Summe von B und C um 5, und deren halbe Differenz um 8 übertrifft.

11) 3 junge Hühner und eine Ente kosten gerade so viel als 2 Gänse; und 1 Huhn, 2 Enten und 3 Gänse kosteten zusammen 25 s. Den Preis eines jeden zu finden, wenn der Preis einer Gans um ein Viertel grösser ist, als der einer Ente.

12) Wenn A dem B 1 fl. mehr gibt als die Hälfte, von dem was er (A) in seiner Börse hat, dann wird das Geld des B das Doppelte von dem des A sein: und gibt B dem A 4 fl. weniger als die Hälfte von dem, was er (B) nun besitzt, so werden A und B gleichviel Geld haben. Was hatte jeder anfangs?

Achtes Kapitel.**Exponenten und irrationale Grössen.**

§. 86.

Zu beweisen, dass $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ist, wenn m und n beliebige positive ganze Zahlen sind (vergl. §. 20).

Da wegen §. 9 $a^m = a \cdot a \cdot a$ etc. (m Faktoren)
und $a^n = a \cdot a \cdot a$ etc. (n Faktoren)
so folgt, dass $a^m \cdot a^n$
 $= a \cdot a \cdot a$ etc. (m Faktoren) $\times a \times a \times$ etc. (n Faktoren)
 $= a \cdot a \cdot a \times$ etc. ($m + n$) Faktoren $= a^{m+n}$, nach §. 9.

§. 87.

Ferner $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$;
denn $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m$ etc. (n Faktoren)
 $= a^{m+m+m}$ etc. (n Glieder) $= a^{mn}$,
und $(a^n)^m = a^n \cdot a^n \cdot a^n$ etc. (m Faktoren)
 $= a^{n+n+n}$ etc. (m Glieder) $= a^{nm}$,

folglich,

da $a^{mn} = a^{nm}$, haben wir $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
das heisst: die n te Potenz der m ten Potenz
von a ist gleich der m ten Potenz der n ten
Potenz von a , und jede von beiden wird ge-
funden, indem man die zwei Exponenten
multipliziert.

§. 88.

Ferner ist auch $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$;
denn es sei $\sqrt[n]{a^m} = x^m$, so ist $a^m = (x^m)^n = (x^n)^m$
nach §. 87;
woraus $a = x^n$, und folglich $\sqrt[n]{a} = x$ und $(\sqrt[n]{a})^m = x^m$;
daher haben wir $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$;

d. h. die n te Wurzel der m ten Potenz von a ist gleich der m ten Potenz der n ten Wurzel von a .

§. 89.

Diese Resultate gelten bis jetzt nur für positive ganze Exponenten, welche (§. 9) zuerst benützt wurden, um in Kürze die Wiederholung ein und desselben Faktors in irgend einem Produkt anzudeuten.

Gesetzt nun aber, wir schreiben eine Grösse nieder, mit einem positiven Bruch im Exponenten, wie in $a^{\frac{p}{q}}$, und kommen überein, dass ein solches Zeichen nach demselben Gesetz der Multiplikation behandelt werden soll, wie wenn der Exponent eine ganze Zahl wäre, nemlich nach $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$: was würde ein solches Symbol bedeuten, wenn es ebenso behandelt wird.

Da, im Falle positiver Ganzen, aus diesem Gesetze folgt, dass $(a^m)^n = a^{mn}$, so würden wir hier auch haben $(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{\frac{pq}{q}} = a^p$; und hieraus erhellt, dass $a^{\frac{p}{q}}$ eine solche Grösse bedeuten würde, welche, auf die q te Potenz erhoben, gleich a^p wird. Aber die Grösse, deren q te Potenz a^p ist §. 10 die q te Wurzel von a^p , und daher $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, oder $= (\sqrt[q]{a})^p$ nach §. 88.

Hieraus folgt, wenn ein Bruchexponent bei irgend einer Grösse vorkommt, so bedeutet der Zähler eine Potenz, und der Nenner eine Wurzel, die aus derselben gezogen werden soll.

Es ist also $a^{\frac{1}{2}} =$ der 2ten Wurzel der 1ten Potenz von a
 $= \sqrt{a}$; ebenso $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ u. s. w.

$a^{\frac{2}{3}} = \text{Kubikwurzel des Quadrats von } a = \sqrt[3]{a^2}$
 oder $= \text{Quadrat der Kubikwurzel von } a = (\sqrt[3]{a})^2$
 ebenso $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$ oder $(\sqrt[4]{a})^3$; $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{3}{6}} = \text{etc.}$, oder
 $\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} = \text{etc.}$

§. 90.

Ferner, wenn wir eine Grösse mit einem negativen Exponenten niederschreiben, wie a^{-p} (wobei p eine ganze Zahl oder ein Bruch sein darf) und annehmen, dass dieser Ausdruck nach demselben Gesetz der Multiplikation behandelt werden soll, wie wenn der Exponent positiv wäre; was würde solch ein demgemäss behandeltes Symbol bedeuten?

Nach diesem Gesetz würden wir bekommen:

$$a^{m+p} \cdot a^{-p} = a^{m+p-p} = a^m$$

aber auch $a^{m+p} : a^p = \frac{a^{m+p}}{a^p} = a^m,$

so dass durch die Multiplikation mit a^{-p} dasselbe geschieht, wie durch die Division mit a^p , und daher

$$1 \cdot a^{-p} = 1 : a^p, \text{ oder } a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Hieraus ergibt sich: Jede Grösse mit einem negativen Exponenten bezeichnet den reciproken Werth derselben mit dem nemlichen positiven Exponenten.

Z. B. $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, oder
 $= \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}}.$

$$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}, \text{ oder } = \sqrt[3]{a^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}.$$

Hienach kann irgend eine Potenz im Zähler eines Ausdrucks in den Nenner versetzt werden, und um-

gekehrt, durch blossen Wechsel des Vorzeichens ihres Exponenten.

$$\text{Es ist also } a^{-3} b^2 c^{-1} = \frac{a^{-3} b^2}{c} = \frac{a^{-3}}{b^{-2} c} = \frac{b^2 c^{-1}}{a^3} = \text{etc.}$$

§. 91.

Schreiben wir endlich eine Grösse, mit Null im Exponenten, nieder, also a^0 , und nehmen an, mit diesem Symbol soll verfahren werden, wie wenn der Exponent eine wirkliche Zahl wäre, was würde es alsdann bedeuten?

Da, diesem Gesetz zufolge, $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$, so ergibt sich, dass a^0 nur soviel ist als 1, welches auch der Werth von a sein mag.

Der Ausdruck $a^{\frac{p}{q}}$ wird auch noch „ a auf der $\frac{p}{q}$ ten Potenz“ geheissen, und desgleichen in dem Falle von a^{-m} und a^0 ; aber das Wort Potenz hat hier seine ursprüngliche Bedeutung verloren, und bedeutet nunmehr eine Grösse mit einem Exponenten (wie beschaffen dieser Exponent sein mag), und richtet sich, in allen Fällen, nach dem Gesetz $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

§. 92.

Es ergibt sich schliesslich: wie beschaffen auch die Exponenten sein mögen, so ist: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

- (1) Um irgend welche Potenzen derselben Grundzahl zu multiplizieren, müssen wir die Exponenten addiren;
- (2) um eine Potenz einer Grösse durch eine andere zu dividiren, müssen wir den Exponenten des Divisors von dem des Dividenden subtrahiren, und
- (3) um irgend eine Potenz von einer Potenz einer Grösse zu erhalten, müssen wir die zwei Exponenten mit einander multiplizieren.

Es ist also $a^3 \cdot a^{-2} = a^{3-2} = a$; $a^3 : a^{-\frac{1}{2}} = a^{3+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$,
 $a^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{3}{5}} = a^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{5}} = a^{\frac{1}{10}}$,
 $(a^3)^{-2} = a^{-6}$, $(a^{-3})^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$; $\left\{ (a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} \right\}^{-12} = a^4$,
 $2a^{\frac{3}{2}} \cdot 3a^{-\frac{3}{2}} = 6a^0 = 6$, $\left\{ \sqrt[3]{a b^{-2}} \sqrt[3]{a b} \right\}^4 = \left\{ a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \right\}^4$
 $= (a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{3}})^4 = a^{\frac{8}{3}} b^{-\frac{4}{3}} = a^2 b^{-\frac{4}{3}}$.

Uebungsbeispiele XXXII.

Drücke mit gebrochenen Exponenten aus:

- 1) $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^4} + (\sqrt{x})^5 + (\sqrt{x})^2$.
- 2) $\sqrt[3]{a^3 b^2} + \sqrt[3]{a^2 b^4} + \sqrt[3]{a b^6} + \sqrt[6]{a^5 b^3}$.
- 3) $a^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{b^8} + (\sqrt[3]{a})^5 + \sqrt[5]{a^6 b} + \sqrt[6]{a^6 b^4}$.
- 4) $\sqrt[4]{a^2 b^8} + a(\sqrt{b})^6 + \sqrt[5]{a^2 b^{10}} + \sqrt[6]{a^3 b^4}$.

Drücke mit positiven Exponenten aus:

- 5) $a^{-1} b c + a b^{-2} c + a^{-1} b^{-1} c^{-1} + a^{-1} b^{-2} c^3$.
- 6) $\frac{a^{-2} b^{-2}}{c^{-1}} + \frac{2a}{b^{-1} c^{-1}} + \frac{3b^{-1} c^{-2}}{a^{-3}} + \frac{1}{a^{-1} b^{-2} c^{-8}}$.

Uebungsbeispiele XXXIII.

Vereinfache

- 1) $\left\{ (a^{-3} b^2)^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{2}{3}}$.
- 2) $\sqrt[3]{a^2 \sqrt[3]{a^{-1}}}$.
- 3) $\sqrt[3]{a^{-1} \sqrt[3]{a^3 \sqrt[3]{a^{-4}}}}$.
- 4) $\sqrt[3]{a^2 b \sqrt[3]{a^{-4} b^{-2}}}$.
- 5) Multipliziere $x^{\frac{5}{2}} + x^2 y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{2}{3}} + x y + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{5}{3}}$
mit $x^{\frac{1}{2}} - y^3$.
- 6) Multipliziere $2 + x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{4}{3}}$
mit $1 - x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}$.
- 7) Dividire $a x^{-1} + b^2$ durch $a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$.
- 8) Dividire $x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x^2 - 4 a x^{\frac{3}{2}} + 6 a^{\frac{3}{2}} x - 2 a^2 x^{\frac{1}{2}}$
durch $x^{\frac{5}{2}} - 4 a x^{\frac{1}{2}} + 2 a^{\frac{3}{2}}$.

9. Schreibe nieder die Quadratwurzel von $x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$
 $- 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$.

10. Ziehe die Quadratwurzel aus von $a^{\frac{3}{2}} - 4a + 10$
 $- 4a^{-1} + a^{-\frac{3}{2}}$.

Neuntes Kapitel.

Quadratische Gleichungen.

§. 93.

Quadratische Gleichungen sind solche, in welchen das Quadrat der unbekannten Grösse, nur keine höhere Potenz derselben vorkommt. Man theilt sie ein in: (1) Reine quadratische, in denen das Quadrat allein vorhanden ist, ohne die erste Potenz, wie $x^2 - 9 = 0$, etc.; (2) unreine quadratische, in welchen sowohl die erste Potenz als das Quadrat auftritt, wie $x^2 - 3x + 2 = 0$, etc.

§. 94.

Rein quadratische werden gelöst, wie einfache Gleichungen, indem man die unbekannten Grössen auf die eine Seite und die bekannten Grössen auf die andere Seite ordnet. So werden wir den Werth von x^2 finden, und hieraus den von x , welchem wir das Doppelzeichen $\pm$ vorsetzen müssen. Solche Gleichungen werden daher zwei gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen haben.

Beisp. 1. $x^2 - 9 = 0$; hier ist $x^2 = 9$, und $x = \pm 3$.

Hätten wir gesetzt $\pm x = \pm 3$, so würden wir dennoch nur diese zwei verschiedenen Werthe von x , nemlich $x = +3$, $x = 3$ erhalten haben; da $-x = +3$, $x = -3$, und $-x = -3$, $x = +3$ gibt.

Beisp. 2. $\frac{1}{8} (3x^2 + 5) - \frac{1}{3} (x^2 + 21) = 39 - 5x^2.$

Durch Reduziren: $121x^2 = 1089$; daher $x^2 = 9$, und $x = \pm 3$.

§. 95.

Eine unrein quadratische Gleichung kann stets auf die Form gebracht werden, $x^2 + p x + q = 0$, wo der Coefficient von x^2 , $+ 1$ ist und p , q Zahlen oder bekannte Grössen vorstellen.

Man hat nun in dieser Gleichung $x^2 + p x = -q$, und wenn wir auf jeder Seite $\left(\frac{1}{2} p\right)^2$ addiren, bekommen wir:

$$x^2 + p x + \frac{1}{4} p^2 = \frac{1}{4} p^2 - q:$$

Durch dieses Einschalten wird die erste Seite ein vollkommenes Quadrat, und wenn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht und, wie vorhin, das doppelte Vorzeichen auf der rechten Seite setzt:

$$x + \frac{1}{2} p = \pm \sqrt{\frac{1}{4} p^2 - q}, \text{ und}$$

$$x = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} p^2 - q}.$$

Dieser Ausdruck gibt uns, je nachdem wir das obere oder untere Vorzeichen nehmen, zwei Wurzeln der quadratischen Gleichung.

§. 96.

Aus dem Vorigen leiten wir die folgende Regel zur Lösung einer unrein quadratischen Gleichung ab.

Reduzire sie auf ihre einfachste Form; setze die mit x^2 und x behafteten Glieder auf Eine Seite (der Coefficient von x^2 ist $+ 1$) und die bekannte Grösse auf die andere; wenn wir nun das Quadrat des halben Coefficienten von x auf jeder Seite

addiren, so wird die Linke ein vollständiges Quadrat werden; und ziehen wir auf jeder Seite die Quadratwurzel aus, und versehen die rechte Seite mit dem Doppelzeichen, so werden wir, wie oben, die zwei Wurzeln der Gleichung erhalten.

Beisp. 1. $x^2 - 6x = 7$. Hier kommt $x^2 - 6x + 9 = 7 + 9 = 16$, woraus $x - 3 = \pm 4$, u. $x = 3 + 4 = 7$, oder $x = 3 - 4 = -1$; so dass 7 und -1 die zwei Wurzeln der Gleichung sind.

Beisp. 2. $x^2 + 14x = 95$. Hier: $x^2 + 14x + 49 = 95 + 49 = 144$, woraus $x + 7 = \pm 12$, und $x = -7 + 12 = 5$, oder $= -19$.

Uebungsbeispiele XXXIV.

$$1) \quad x^2 - 2x = 8.$$

$$2) \quad x^2 + 10x = -9.$$

$$3) \quad x^2 - 14x = 120.$$

$$4) \quad x^2 - 12x = -35.$$

$$5) \quad x^2 + 32x = 320.$$

$$6) \quad x^2 + 100x = 1100.$$

§. 97.

Ist der Coefficient von x eine ungerade Zahl, so ist seine Hälfte ein Bruch.

Beisp. 1. $x^2 - 5x = -6$. Hieraus

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \frac{25}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\text{woraus } x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}, \text{ und } x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3,$$

$$\text{oder } x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Beisp. 2. $x^2 - x = \frac{3}{4}$. Hieraus

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

$$\text{woraus } x - \frac{1}{2} = \pm 1, \text{ und } x = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2},$$

$$\text{oder } x = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

§. 98.

Ist der Coefficient von x ein Bruch, so wird natürlich seine Hälfte durch Halbirung des Zählers (sofern

diess möglich), oder (wenn nicht) durch Verdopplung des Nenners gefunden werden.

Beisp. 1. $x^2 + \frac{10}{3}x = 19$. Hier wird

$$x^2 + \frac{10}{3}x + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 19 + \frac{25}{9} = \frac{196}{9},$$

woraus $x + \frac{5}{3} = \pm \frac{14}{3}$, und $x = -\frac{5}{3} + \frac{14}{3} = 3$,

oder $x = -\frac{5}{3} - \frac{14}{3} = -6\frac{1}{3}$.

Beisp. 2. $x^2 + \frac{13}{5}x = 74$. Hier ist

$$x^2 + \frac{13}{5}x + \left(\frac{13}{10}\right)^2 = 74 + \frac{169}{100} = \frac{7569}{100},$$

woraus $x + \frac{13}{10} = \pm \frac{87}{10}$, und $x = -\frac{13}{10} \pm \frac{87}{10} = 7\frac{2}{5}$, oder -10 .

Uebungsbeispiele XXXV.

1) $x^2 + 7x = 8$.

2) $x^2 - 13x = 68$.

3) $x^2 + 25x = -100$.

4) $x^2 + 13x = -12$.

5) $x^2 - \frac{1}{3}x = 34$.

6) $x^2 - \frac{3}{2}x = 27$.

7) $x^2 + \frac{7}{5}x = 86$.

8) $x^2 + \frac{26}{7}x = 144$.

§. 99.

In den folgenden Beispielen werden die Gleichungen zuerst eine Reduktion erheischen; und da die Regel fordert, dass $+1$ der Coefficient von x^2 sein soll, so müssen wir, wenn er ein anderer ist, zuerst jedes Glied der Gleichung durch eben diesen dividiren.

Beisp. 1. $3x^2 - 20x = 5$. Hieraus $x^2 - \frac{20}{3}x = \frac{5}{3}$, und

$$x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{100}{9} = \frac{115}{9}, \text{ woraus } x - \frac{10}{3} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{115},$$

oder $x = \frac{1}{3}(10 \pm \sqrt{115})$, da die Wurzeln hier irrationale Grössen sind.

Wenn die gegebene Gleichung x unter einem Ir-

rationalausdruck enthält, so kann sie manchmal gelöst werden, dass man das Irrational auf die Eine Seite für sich allein schafft und dann erst die Gleichung quadriert.

Beisp. 2. $x = \sqrt{5x^2 + 19} - 7.$

Hieraus: $\sqrt{5x^2 + 19} = x + 7$; durch Quadriren:

$$5x^2 + 19 = x^2 + 14x + 49, \text{ woraus } 2x^2 - 7x = 15,$$

$$\text{daher } x^2 - \frac{7}{2}x = \frac{15}{2}, \text{ und } x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = \frac{15}{2} + \frac{49}{16}$$

$$= \frac{169}{16}, \text{ und } x = \frac{7}{4} \pm \frac{13}{4} = 5 \text{ oder } -1\frac{1}{2}.$$

Uebungsbeispiele XXXVI.

1) $\frac{3}{2}x = 2 + \frac{2}{x}.$

2) $x + \sqrt{5x + 10} = 8.$

3) $4x - \frac{14 - x}{x + 1} = 14.$

4) $13 - 2x = \frac{3(2x - 11)}{x - 3}.$

5) $\frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} + \frac{x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = 3.$

6) $x - 2 = \sqrt{2x - 1}.$

7) $\frac{10}{x} - \frac{3}{x + 2} = \frac{10}{x + 1}.$

8) $x = 1\frac{11}{12} + \frac{x - 1}{3(x + 2)}.$

9) $\frac{3x + 8}{x - 4} - \frac{5(12 - x)}{2x + 3} = 11.$

10) $\frac{x^3 - 10x^2 + 1}{x^2 - 6x + 9} = x - 3.$

§. 100.

Wenn α, β die zwei Wurzeln von $x^2 + px + q = 0$ vorstellen, dann ist $-p = \alpha + \beta$, und $q = \alpha\beta$.

Denn, da $\alpha = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, und

$$\beta = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}, \text{ so ist}$$

$$\alpha + \beta = -p, \text{ und } \alpha\beta = \frac{1}{4}p^2 - \left(\frac{1}{4}p^2 - q\right) = q,$$

hieraus ergibt sich: sobald eine quadratische Gleichung auf die Form $x^2 + px + q = 0$ gebracht wird, so

ist der Coefficient des 2ten Glieds mit entgegengesetztem Vorzeichen = der Summe der Wurzeln, und das 3te Glied = dem Produkt der Wurzeln.

So ist in §. 96 die Gleichung in eben dieser Form ausgedrückt, $x^2 - 6x - 7 = 0$, und die Wurzeln werden dort gefunden: 7 und -1 ; und hiebei $+6 = 7 + (-1)$ = der Summe der Wurzeln, und $-7 = 7 \cdot (-1)$ = dem Produkt der Wurzeln.

§. 101.

Bei der Lösung von Aufgaben, welche auf quadratische oder höhere Gleichungen führen, kann es zwei oder mehr Wurzelwerthe geben, und diese können reelle (wirkliche) Werthe oder unmöglich sein. Im ersten Fall müssen wir untersuchen, ob einige der Wurzeln durch den Sinn der Frage ausgeschlossen sind; denn dieser kann ja durchweg gebrochene, oder negative, oder irrationale Resultate verwerfen: im letzteren Falle schliessen wir, dass die Lösung der vorgelegten Frage arithmetisch unmöglich ist.

Beisp. 1. Jemand kaufte eine Anzahl Ochsen für 120 Karolin; wenn er für dasselbe Geld 3 mehr gekauft hätte, so würde er für jeden 2 Karolin weniger bezahlt haben. Wie viel Ochsen kaufte er?

Es sei x die Zahl der gekauften Ochsen, dann war der wirklich für jeden ausgegebene Preis $\frac{120}{x}$, und daher $\frac{120}{x+3} = \frac{120}{x} - 2$, woraus $x = 12$, oder $= -15$; diese letztere Wurzel ist nach der Natur der Aufgabe zu verwerfen.

Beisp. 2. Die Summe der Quadrate der Ziffern einer zweistelligen Zahl ist 25, und das Produkt der Ziffern ist 12. Die Zahl zu finden.

Es mögen x, y die Ziffern sein, dann wird die Zahl selbst sein $10x + y$, und es ist: $x^2 + y^2 = 25$, und $xy = 12$; aus diesen Gleichungen erhalten wir $x = 3, y = 4$, oder $x = 4, y = 3$, und die Zahl wird 34 oder 43 sein. In diesem Falle geben beide Wurzeln Lösungen.

Beisp. 3. Zwei Zahlen zu finden, deren Differenz 10, und deren Produkt ein Drittel vom Quadrat ihrer Summe ist.

Es sei x = der kleinern, und $x + 10$ = der grössern; dann ist $x(x + 10) = \frac{1}{3}(2x + 10)^2$, woraus $x = -5 \pm 5\sqrt{-3}$, was unmöglich ist. Die Aufgabe läuft in der That auch darauf hinaus, dass nach zwei Zahlen x und y gefragt wird, von der Eigenschaft, dass $xy = \frac{1}{3}(x + y)^2$, oder $3xy = x^2 + 2xy + y^2$, oder $xy = x^2 + y^2$; letzteres kann leicht als unstatthaft erwiesen werden: denn $(x - y)^2$ oder $x^2 - 2xy + y^2$ ist nothwendigerweise positiv (da es eine Quadratzahl ist), was auch x und y für Grössen sein mögen; und es muss demnach $x^2 + y^2$ sogar grösser als $2xy$ sein.

Uebungsbeispiele XXXVII.

1. Die Länge eines rechtwinkligen Felds übertrifft die Breite um 10 Ruthen, und sein Flächeninhalt ist 24,000 Quadratruthen. Seine Ausdehnungen zu finden.

2. Jemand, der nach seinem Alter gefragt wurde, antwortete: Wenn Sie 1 dazu zählen und nun quadriren, und hiezu ein Viertel dieser Quadratzahl nehmen, so wird die so gefundene Zahl 720 sein. Sein Alter zu finden.

3. Wenn man die Seite eines quadratischen Feldes verdoppelt und um 1 Ruthe verlängert, so würde sein Flächeninhalt um 7701 Quadratruthen gewachsen sein. Die Seite des Feldes zu finden.

4. Welche zwei Zahlen sind es, deren Differenz 3, und deren Summe der Quadrate 485 ist?

5. Es sind zwei quadratförmige Gebäude, die mit Platten, jede 9 Quadratruthen gross, belegt sind, die Seite des einen Gebäudes übertrifft die des andern um 20 Ruthen, und die für beide Gebäude erforderlichen Platten betragen 2650. Ihre Seiten zu finden.

6. Ein Corps Soldaten könnte entweder zu einem geschlossenen Quadrat, oder in zwei gleichen Colonnen aufgestellt werden, wobei die eine Seite 48 Mann mehr und die andere 36 weniger als die Seite des Quadrats enthält. Wieviel waren es im Ganzen?

7. Ein Gutsbesitzer kaufte Schweine für £ 9. Wenn er für

das nemliche Geld 2 weiter gekauft hätte, so würde ihn jedes Schwein 3 s. wohlfeiler gekommen sein. Wie viele Schweine kaufte er?

8. Ein Mann reiste 60 englische Meilen weit. Wenn er nun um eine Meile in der Stunde schneller gelaufen wäre, so hätte er 3 Stunden weniger zu der Reise gebraucht. Wie schnell reiste er?

9. Ein Geflügelhändler kaufte 15 Enten und einige Truthühner um fünf Guineen. Der Preis einer Ente in Schillingen war derselbe, wie die Anzahl der Truthühner, und der Preis einer Ente und eines Truthahns war zusammen 23 s. Wie viele Truthühner waren es?

10. A und B brechen zu gleicher Zeit auf, um an einen 24 Meilen entfernten Platz zu gelangen. A marschirte in der Stunde um eine halbe Meile schneller als B, und hatte das Ziel seiner Reise 32 Minuten vor ihm erreicht. Ihre Geschwindigkeiten zu bestimmen (d. h. ihre Wege in 1 Stunde).

11. Ein Weinwirth kauft ein Fass Wein um £ 19. 10 s., von welchem er 3 Eimer zu seinem eigenen Gebrauch ablässt; er verkauft den übrigen um £ 17. 10 s. und gewinnt 5 s. am Eimer. Wie viel Eimer hielt das Fass?

12. Es gibt 2 Herden Schafe, wovon die erste 12 weniger als die zweite zählt. Wäre jedes Schaf der ersten Heerde so viele Schillinge werth, als die zweite Heerde Schafe zählt, und umgekehrt, so würde der Werth der beiden Heerden £ 172. 16 s. betragen. Wie viel Schafe sind bei jeder Heerde?

Zehntes Kapitel.

Arithmetische und geometrische Progression.

§. 102.

Von Grössen sagt man, sie stehen in arithmetischer Progression, wenn sie nach einer gemeinschaftlichen Differenz fortschreiten.

Z. B. 1, 3, 5, 7 etc.; 8, 4, 0, — 4, etc.; $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \text{etc.}$ stehen in arithmetischer Progression, da die gemein-

schaftlichen Differenzen beziehungsweise 2, — 4, d sind; letztere werden gefunden, wenn man ein Glied von dem nächstfolgenden Glied subtrahirt.

§. 103.

Gegeben das erste Glied a , und der gemeinschaftliche Unterschied d einer arithmetischen Reihe, das n te Glied u und die Summe S der n Glieder zu finden.

Hier wird die Reihe sein:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \text{etc.},$$

wobei der Coefficient von d in jedem Gliede gerade um eines kleiner ist als die Nummer des Glieds: so haben wir im 2ten Glied d , oder $1d$, im 3ten $2d$, im 4ten $3d$, etc. und ebenso im n ten Glied werden wir $(n - 1)d$ haben, also $u = a + (n - 1)d$.

Es ist ferner

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \text{etc.} + (u - 2d) + (u - d) + u$$

und ebenso

$$S = u + (u - d) + (u - 2d) + \text{etc.} + (a + 2d) + (a + d) + a$$

folglich

$$2S = (a + u) + (a + u) + (a + u) + \text{etc.} = (a + u)n$$

$$\text{daher } S = (a + u) \frac{n}{2} = \left\{ 2a + (n - 1)d \right\} \frac{n}{2},$$

$$\text{weil } u = a + (n - 1)d \text{ ist.}$$

Beisp. 1. Das 10te Glied und die Summe der 10 Glieder der Reihe 1, 5, 9, etc. zu finden.

Hier ist $a = 1$, $d = 4$, $n = 10$,

$$\text{folglich } u = 1 + (10 - 1) \cdot 4 = 1 + 9 \cdot 4 = 37$$

$$s = (1 + 37) \cdot \frac{10}{2} = 190.$$

Beisp. 2. Das 9te Glied und die Summe der 9 Glieder von 7, $5\frac{1}{2}$, 4 etc. zu finden.

$$\text{Hier ist } a = 7, d = -\frac{3}{2}, n = 9,$$

folglich $u = 7 + (9 - 1) \cdot -\frac{3}{2} = 7 - 8 \cdot \frac{3}{2} = -5$

$$s = (7 - 5) \frac{9}{2} = 9.$$

Beisp. 3. Das 13te Glied der Reihe $-48, -44, -40$ etc. zu finden.

Hier ist $a = -48, d = 4, n = 13,$

folglich $u = -48 + (13 - 1) \cdot 4 = -48 + 12 \cdot 4 = 0.$

Beisp. 4. Die Summe der 7 Glieder von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} +$ etc. zu finden.

Hier ist $a = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{6}, n = 7;$ und da wir diessmal nicht u zu finden haben: so nimmt man die zweite Formel,

$$s = (1 + 6 \cdot -\frac{1}{6}) \frac{7}{2} = (1 - 1) \frac{7}{2} = 0.$$

In diesem Falle ist die fortlaufende Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ etc., deren erste 7 Glieder zusammen Null betragen.

Uebungsbeispiele XXXVIII.

Das letzte Glied und die Summe zu finden von:

1) $2 + 4 + 6 +$ etc. auf 10 Stellen.

2) $1 + 3 + 5 +$ etc. " 12 "

3) $3 + 8 + 13 +$ etc. " 7 "

4) $-5 - 3 - 1 +$ etc. " 8 "

5) $4 - 3 - 10 -$ etc. " 10 "

6) $1 + \frac{6}{7} + \frac{5}{7} +$ etc. " 15 "

§. 104.

Von Grössen sagt man, sie stehen in geometrischer Progression, wenn sie nach einem gemeinsamen Faktor fortschreiten.

So sind $1, 3, 9$ etc.; $4, 1, \frac{1}{4}$ etc.; $-\frac{1}{3}, \frac{4}{15}, -\frac{16}{75}$ etc.; a, ae, ae^2 etc. in geometrischer Progression, da die gemeinschaftlichen Faktoren oder Exponenten (wie sie genannt werden) beziehungsweise $3, \frac{1}{4}, -\frac{4}{5}, e$ sind; der Exponent kann gefunden

werden, wenn man irgend ein Glied durch das vorhergehende Glied dividirt.

§. 105.

Gegeben das erste Glied a und der gemeinschaftliche Exponent e einer geometrischen Reihe, das n te Glied u und die Summe s der n Glieder zu finden.

Hier wird die Reihe sein a, ae, ae^2, ae^3, ae^4 etc., und der Exponent von e in jedem Glied ist gerade um eins kleiner, als die Nummer des Glieds: so haben wir im 2ten Glied e , d. h. e^1 , im 3ten e^2 , im 4ten e^3 etc., und ebenso werden wir im n ten Glied e^{n-1} haben; daher $u = ae^{n-1}$.

Ferner $s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \text{etc.} + ae^{n-1}$,
woraus $es = ae + ae^2 + ae^3 + \text{etc.} + ae^{n-1} + ae^n$,
daher $es - s = ae^n - a$, weil die andern Glieder verschwinden; hieraus

$$s = \frac{ae^n - a}{e - 1} = a \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{eu - a}{e - 1}, \text{ weil } eu = ae^n.$$

Beisp. 1. Das 6te Glied und die Summe der 6 Glieder von 1, 2, 4 etc. zu finden.

Hier ist $a = 1, e = 2, n = 6$,

folglich $u = 1 \cdot 2^{6-1} = 1 \cdot 2^5 = 1 \cdot 32 = 32$; und $s = \frac{64 - 1}{2 - 1} = 63$.

Beisp. 2. Das 8te Glied und die Summe der 8 Glieder von 81, -27, 9, etc. zu finden:

hier ist $a = 81, e = -\frac{1}{3}, n = 8$,

folglich $u = 81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = 3^4 \cdot -\frac{1}{3^7} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27}$;

$$\text{und } s = \frac{\frac{1}{81} - 81}{-\frac{1}{3} - 1} = 60 \frac{20}{27}.$$

Beisp. 3. Die Summe zu finden von 3, -6, +12 - etc. auf 6 Stellen.

Hier ist $a = 3$, $e = -2$, $n = 6$; also, ohne zuvor u zu finden,

$$s = 3 \cdot \frac{(-2)^6 - 1}{-2 - 1} = 3 \cdot \frac{64 - 1}{-3} = -63.$$

Uebungsbeispiele XXXIX.

Das letzte Glied und die Summe zu finden von:

- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|----|---|-------|---|------|-----|----|-----------|
| 1) | 1 | + | 4 | + | 16 | + | etc. | bei | 4 | Gliedern. |
| 2) | 5 | + | 20 | + | 80 | + | etc. | n | 5 | n |
| 3) | 3 | + | 6 | + | 12 | + | etc. | n | 6 | n |
| 4) | 2 | - | 4 | + | 8 | - | etc. | n | 8 | n |
| 5) | 1 | - | 3 | + | 9 | - | etc. | n | 9 | n |
| 6) | 1 | - | 2 | + | 2^2 | - | etc. | n | 10 | n |

§. 106.

Ist e ein echter Bruch, d. h. ist $e < 1$, so werden seine Potenzen e^2 , e^3 , etc., e^n nothwendigerweise auch < 1 sein, und mithin wird $ae^n < a$ sein: desshalb dürfen wir, anstatt $s = \frac{ae^n - a}{e - 1}$, in welchem Bruch sowohl Zähler als Nenner negativ sind, in diesem Fall schreiben

$$s = \frac{a - ae^n}{1 - e} = \frac{a}{1 - e} - \frac{ae^n}{1 - e}.$$

Je grösser wir nun den Werth von n (d. h. je mehr Glieder wir von der Reihe nehmen), desto kleiner wird der Werth von ae^n sein; und wenn wir n gross genug nehmen, so können wir ae^n so klein erhalten, als wir wollen, nur nie so klein, um wirklich zu verschwinden. Wenn ae^n verschwände, so wäre

die Summe der Reihe $= \frac{a}{1 - e}$. Nun aber wird, so

klein auch der Werth von ae^n sein mag, der zweite Bruch nie wirklich Null werden, woraus folgt, dass die Summe der Reihe niemals den vorigen Werth genau erreichen wird, obgleich, wenn n wächst, d. h. wenn wir mehr Glieder der Reihe nehmen, wir die Summe diesem Werthe nach Belieben nähern können.

In Anbetracht dessen sagt man, $\frac{a}{1-e}$ sei die Grenze der Summe der Reihe: $a + a e + a e^2 + \text{etc.}$, oder manchmal (aber weniger genau) die Summe der Reihe ad infinitum.

Es ist herkömmlich, die Grenze einer solchen Summe mit Σ zu bezeichnen.

Beisp. 1. Die Grenze der Summe von der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{etc.}$ zu finden.

$$\text{Hier ist } a = 1, e = \frac{1}{2}, \text{ daher } \Sigma = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

d. h. je mehr wir Glieder von dieser Reihe nehmen, desto näher wird ihre Summe = 2 sein, aber sie wird solches in Wirklichkeit nie erreichen.

Beisp. 2. Die Summe von $2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} - \text{etc.}$ ad infinitum,

$$\begin{aligned} \text{hier ist } a = 2\frac{1}{2}, e = -\frac{1}{5}, \text{ folglich } \Sigma &= \frac{\frac{5}{2}}{1 - (-\frac{1}{5})} = \frac{\frac{5}{2}}{1 + \frac{1}{5}} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{\frac{6}{5}} = 2\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Uebungsbeispiele XL.

Die Grenze der Summe zu finden von:

- | | |
|--|--|
| 1) $4 + 2 + 1 + \text{etc.}$ | 2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \text{etc.}$ |
| 3) $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \text{etc.}$ | 4) $\frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{3} - \text{etc.}$ |
| 5) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \text{etc.}$ | 6) $1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \text{etc.}$ |

Elftes Kapitel.

Verhältniss, Proportion und Abhängigkeit.

§. 107.

Das Verhältniss einer Grösse zu einer andern ist die Beziehung, in welcher die erstere zum letzteren in Rücksicht auf Menge steht. Man vergleicht sie, indem man untersucht, nicht um wie viel die eine grösser oder kleiner ist als die andere, sondern wieviel Male sie dieselbe enthält, oder in ihr enthalten ist, d. h. welches Vielfaches, welcher Theil oder Theile, oder mit anderen Worten, was für ein Bruch die erste vom zweiten ist.

Diess ist der natürliche Weg, auf dem wir die Menge der Grössen vergleichen. So ist der blosse Zahlenunterschied zwischen 999 und 1000 derselbe wie zwischen 1 und 2; aber Niemand würde Anstand nehmen zu sagen: 999 ist viel grösser im Vergleich zu 1000, als 1 im Vergleich zu 2 ist. Der Grund ist: der Geist erfasst anschaulich, dass 999 ein viel grösseres Bruchstück von 1000 ist, als 1 von 2; und diess würden wir eben mit den Worten aussprechen: das Verhältniss von 999 zu 1000 ist grösser, als das von 1 zu 2.

Es wird daher das Verhältniss einer Grösse zu einer andern durch den Bruch dargestellt, den man erhält, indem man die erstere durch die letztere dividirt.

So ist das Verhältniss von 6 zu 3, $\frac{6}{3}$ oder 2, das von 15 zu 40 ist $\frac{15}{40}$ oder $\frac{3}{8}$, das von $4a$ zu $6b$ ist $\frac{4a}{6b}$ oder $\frac{2a}{3b}$.

Natürlich müssen die zwei verglichenen Grössen (sofern sie nicht blosse Zahlen, oder algebraische Grössen mit Zahlenbedeutung sind) von derselben Art sein, sonst könnte nicht die eine ein Bruchstück der andern sein.

So ist das Verhältniss von fl. 9 zu fl. 12 dasselbe, wie das von 9 $\mathfrak{H}$ zu 12 $\mathfrak{H}$, oder von 9 zu 12, oder von 3 zu 4, oder von $\frac{3}{4}$ zu 1: da bei jedem dieser Grössenpaare das erste $\frac{3}{4}$ vom zweiten ist, und es ist demnach $\frac{3}{4}$ der Werth eines jeden dieser Verhältnisse.

§. 108.

Das Verhältniss einer Grösse zu einer andern wird durch zwei zwischen sie gesetzte Punkte angedeutet, wie $a:b$, und die erste heisst das Vorderglied, die letztere das Folgeglied des Verhältnisses.

§. 109.

Das Verhältniss $a^2:b^2$ heisst das Duplikat (d. h. quadrirtes Verhältniss) von $a:b$; $a^3:b^3$ das Triplicatsverhältniss von $a:b$, etc.

§. 110.

Aufgaben über Verhältnisse werden gelöst, indem man sie durch ihre entsprechenden Brüche darstellt, und diese dürfen je nach den gewöhnlichen Regeln behandelt werden.

Verhältnisse werden also mit einander verglichen, indem man den ihnen entsprechenden Brüchen gemeinsame Nenner gibt und dann die Zähler vergleicht; und werden diese Brüche mit einander multipliziert, so sagt man, der entstandene Bruch sei das zusammengesetzte Verhältniss der Verhältnisse, welche durch jene dargestellt sind.

Beisp. 1. Vergleiche die Verhältnisse $5:7$ und $4:9$.

Antw. $\frac{45}{63}$, $\frac{28}{63}$, hieraus folgt $5:7 > 4:9$.

Beisp. 2. Das Verhältniss von $\frac{5}{7}:\frac{4}{9}$ zu finden.

Antw. $\frac{5}{7}:\frac{4}{9} = \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{4} = \frac{45}{28} = 45:28$.

Beisp. 3. Was ist das zusammengesetzte Verhältniss von $2:3$, $6:7$, $14:15$?

Antw. $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{14}{15}$ oder $8:15$.

§. 111.

Wenn zwei Verhältnisse gleich sind, so sagt man, die vier Glieder, aus denen sie bestehen, seien einander proportional; wenn also $a:b = c:d$, d. h. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dann sind a, b, c, d Proportionale.

Diess wird mit den Worten ausgedrückt, „a zu b wie c zu d“, und geschrieben $a:b = c:d$.

Das erste und letzte Glied einer Proportion heissen die äusseren, die andern zwei die mittleren Glieder.

Aufgaben über Proportionen, sowie auch über Verhältnisse, werden mit Benützung der Brüche gelöst.

§. 112.

Wenn 4 Grössen in Proportion stehen, so ist das Produkt der äussern gleich dem Produkt der mittlern Glieder.

(Eines der Verhältnisse muss ein Zahlenverhältniss sein.)

Denn, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch: $ad = bc$.

In Folge dessen können wir, wenn drei Glieder einer Proportion gegeben sind, das andere finden,

nämlich: $a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$, $d = \frac{bc}{a}$.

Zusatz. Wenn $a:b = b:c$, so ist: $ac = b^2$.

Sind die mittleren Glieder einander gleich, so heisst die Pr. stetig.

§. 113.

Wenn das Produkt zweier Faktoren gleich ist dem Produkt zweier andern, so bilden diese vier eine Proportion, worin die Faktoren des einen Produkts äussere, und die des andern mittlere Glieder werden.

Denn, wenn $ad = bc$, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ oder } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \text{ und daher}$$

$$a : b = c : d, \text{ oder } a : c = b : d.$$

In diesen Proportionen sind a, d die äussern, und b, c die mittlern Glieder geworden.

Ebenso ist, wenn $ac = b^2$, $a : b = b : c$.

§. 114.

Sind drei Grössen stetig proportionirt, so ist das Verhältniss des ersten zum dritten gleich dem Duplikatsverhältniss des ersten zum zweiten.

$$\begin{aligned} \text{Denn wenn } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \text{ so folgt: } \frac{a}{c} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}; \end{aligned}$$

daher steht $a : c$ im Duplikatsverhältniss von $a : b$ (§. 109).

§. 115.

Wird in einer Proportion von 4 Grössen die erste und dritte mit einer Zahl und die zweite und vierte mit einer andern Zahl multipliziert, und ist dann das Vielfache des ersten Glieds $>, =, <$ als das des zweiten, so wird auch das Vielfache des dritten Glieds $>, =, <$ sein als das des vierten sein.

Denn wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so haben wir auch $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$, wo m und n irgend beliebige Grössen sein können, und hieraus ergibt sich, wenn $ma >, =, < nb$ ist, auch: $mc >, =, < nd$.

§. 116.

Umgekehrt: Wird von vier Grössen die erste und dritte mit irgend einer Zahl, und die zweite und vierte mit einer andern Zahl multipliziert, und ist nun das Vielfache der ersten $>$, $=$, $<$ als das der zweiten, und ebenso das Vielfache der dritten immer $>$, $=$, $<$ als das der vierten, so bilden die 4 Grössen eine Proportion.

Denn gesetzt, bei den 4 Grössen a , b , c , d seien ma , mc beliebige Vielfache der ersten und dritten, und nb , nd andere Vielfache der zweiten und vierten, es werde gefunden, dass gerade wie ma $>$, $=$, $<$ nb , auch mc $>$, $=$, $<$ nd ist; und e sei die vierte Proportionale zu a , b , c .

Dann ergibt sich, da $\frac{a}{b} = \frac{c}{e}$, auch: $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{ne}$ für alle Werthe von m und n ; gesetzt, m und n werden so gewählt, dass $ma = nb$ ist, dann ist auch $mc = ne$; wenn aber $ma = nb$, so ist nach unsrer Voraussetzung $mc = nd$; hieraus folgt: $nd = ne$, oder $d = e$, und daher $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, oder a , b , c , d stehen in Proportion.

§. 117.

Wenn $a : b = c : d$, und $b : e = d : f$, dann ist auch

$$a : e = c : f.$$

Denn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, und $\frac{b}{e} = \frac{d}{f}$, folglich $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{e} = \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{f}$, oder $\frac{a}{e} = \frac{c}{f}$.

Diess ist der Satz *ex aequali* (vom Gleichvielfachen), mit Bezug auf Euclid V, 2.

§. 118.

Wenn $a : b = c : d$ und $e : f = g : h$, dann ist auch: $a e : b f = c g : d h$.

Denn aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, und $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, folgt: $\frac{a e}{b f} = \frac{c g}{d h}$.

Diess heisst man: die zwei Proportionen zusammensetzen; und ebenso können wir eine beliebige Anzahl solcher Proportionen zusammensetzen.

§. 119.

Wenn vier Grössen eine Proportion bilden, so können wir aus ihnen viele andere Proportionen ableiten, welche alle gleichfalls richtig sind.

Wenn also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, dann ist $\frac{m a}{m b} = \frac{c}{d}$, oder $m a : m b = c : d$; auf ähnliche Weise ergibt sich

$m a : b = m c : d$; $a : m b = c : m d$; $a : b = m c : m d$; und ebenso

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d; a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m} \text{ etc.,}$$

das heisst, entweder das erste oder das vierte Glied einer Proportion kann mit einer beliebigen Zahl multipliziert oder dividirt werden, vorausgesetzt, dass entweder das zweite oder dritte mit derselben Zahl multipliziert oder dividirt wird.

Wir können mithin Brüche wegschaffen, wenn solche in Proportionen vorkommen, indem wir das 1ste und 2te, oder das 1ste und 3te etc. Glied mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen ihrer Nenner multiplizieren: z. B. ist $\frac{1}{9} a : \frac{1}{12} b = \frac{3}{40} : \frac{2}{25}$ (wenn wir das 1ste und 2te Glied mit 36, das 3te und 4te mit 200 multiplizieren), so haben wir $4 a : 3 b = 15 : 16$.

§. 120.

Ferner können sämtliche Sätze von §. 74—77 auf proportionale Grössen angewendet werden.

Wenn also $a : b = c : d$, dann ist umgekehrt, $b : a = d : c$, oder verwechselt $a : c = b : d$; ebenso ist auch $a \pm b : a = c \pm d : c$; $a \pm b : b = c \pm d : d$; $a + b : a - b = c + d : c - d$; $ma + nb : ma - nb = mc + nd : mc - nd$, etc., nebst ähnlichen Proportionen, welche a^n, b^n, c^n, d^n an der Stelle von a, b, c, d enthalten.

Beisp. 1. Eine 4te Proportionale zu $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ zu finden.

Da $d = \frac{b \cdot c}{a}$ (§. 112), so ist diese $\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$.

Beisp. 2. Eine mittlere Proportionale zu 2 und 8 zu finden, da $b^2 = ac$ (§. 112), so ist diese: $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

§. 121.

Wenn zwei Grössen, welche verschiedene Werthe zulassen, so zu einander stehen, dass jede proportional zur andern sich ändert, so sagt man, sie variiren mit einander.

Z.B. Gewicht und Preis einer Waare ändern sich das eine dem andern proportional, so, dass wenn w, w^1 die verschiedenen Gewichte einer und derselben Waare und p, p^1 die entsprechenden Preise vorstellen, dann $w : w^1 = p : p^1$ ist. Hieraus ergibt sich, dass das Gewicht einer Waare mit dem Preise variirt, was algebraisch so ausgedrückt wird, Gewicht $\propto$ Preis.

Uebungsbeispiele XLI.

- 1) Eine vierte Proportionale zu 3, 5, 6 zu finden.
- 2) Eine dritte „ zu 4 und 6 zu finden.
- 3) Eine mittlere „ zu 4 und 9 zu finden.
- 4) Die Gleichung aufzulösen

$$x + 1 : 2x - 5 = 3x + 5 : 4x - 1.$$

- 5) Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, dass wenn 3, 7, 12, 18 einzeln zu ihr addirt werden, die vier Summen eine Proportion bilden sollen.

- 6) Drei Zahlen zu finden, deren Summe 50 ist, so dass, wenn man zur ersten und zweiten je 4 addirt, die Summen $= 2 : 3$, oder

wenn man 6 zur ersten und dritten addirt, die Summen $= 3 : 4$ sich verhalten.

7) Zwei Zahlen im Verhältniss von $1 : 2$ zu finden, so dass, wenn die erste um 6 vermehrt und die zweite um 6 vermindert wird, ihr Verhältniss $2 : 3$ werde.

8) Ein Gutsbesitzer verkauft von seinem Heuvorrath ein Quantum, das sich zum übrigbleibenden wie $4 : 5$ verhält. Er verbraucht nun 15 Ladungen und findet, dass ihm ein Quantum bleibt, welches sich zum verkauften Quantum wie $5 : 7$ verhält. Wie viele Ladungen betrug der Heuvorrath?

9) Das Vermögen eines Gantmanns von 2100 Thlr. unter drei Gläubiger, A, B, C zu theilen; die Ansprüche des A und B verhalten sich $= 2 : 3$, die des B und C wie $4 : 5$. Was muss jeder annehmen?

10) A, B, C unternehmen ein Bankgeschäft, A legt 600 Thlr. weniger ein als B, und 680 Thlr. mehr als C; und die Einlagen des A und B zusammen verhalten sich zu denen des B und C wie $5 : 4$. Wieviel schoss jeder bei?

11) A und B fangen einen Handel an, ihre Kapitalien verhalten sich wie $2 : 3$. A gewinnt 100 fl. und B verliert 100 fl., und nun verhalten sich ihre Kapitalien wie $3 : 4$. Ihre ursprünglichen Kapitalien zu finden.

12) Ein Weinhändler nimmt aus dem grössern von zwei vollen Fässern 15 Imi und aus dem kleinern 11 Imi und findet, dass sich die übrigbleibenden Mengen wie $8 : 3$ verhalten. Sobald die Fässer halb geleert sind, bringt er 10 Imi Wasser in jedes, und nun verhalten sich die flüssigen Quantitäten in denselben wie $9 : 5$. Den Gehalt jedes Fasses zu finden.

Zwölftes Kapitel.

Permutationen und Combinationen.

§. 122.

Die Permutationen einer Anzahl von Grössen sind die mannigfaltigen Stellungen, welche mit ihnen vorgenommen werden können, wenn man eine gewisse Anzahl zu gleicher Zeit zusammen nimmt.

So sind die Permutationen von a, b, c , wenn 2 zusammenstehen, ab, ba, ac, ca, bc, cb .

§. 123.

Die Permutationen von n verschiedenen Dingen (Elementen) zu finden, die zu 1, 2, 3, etc. zusammengenommen werden.

Es seien n verschiedene Dinge a, b, c, d etc. vorhanden.

(1) Die Anzahl der Permutationen, welche aus diesen n Elementen gebildet werden, wenn sie einzeln genommen werden, ist selbstverständlich n .

(2) Nun wollen wir a wegnehmen; es werden dann $n-1$ Elemente, b, c, d , etc. vorhanden sein, und die Permutationen dieser, einzeln genommen, werden (wie zuvor) $n-1$ sein. Setzen wir hierauf a vor jedes derselben, dann wird es $n-1$ Permutationen von n Elementen, a, b, c, d , etc., zwei und zwei zusammengenommen, geben, in welchen a vorne steht, auf ähnliche Weise wird es $n-1$ solche Permutationen geben, in denen b vorne steht, und ebenso viele von den übrigen; also wird es im Ganzen $n(n-1)$ Permutationen von n Grössen, je zwei und zwei bei einander, geben.

(3) Nehmen wir wieder a weg; es werden $n-1$ Elemente, b, c, d , etc. vorhanden sein, und die Permutationen von diesen, zwei und zwei bei einander, werden nach dem Vorhergehenden $(n-1)(n-2)$ sein; und nach demselben Gang des Schlusses wird sich ergeben, dass im Ganzen es $n(n-1)(n-2)$ Versetzungen von n Elementen geben wird, drei und drei zusammengenommen, und so fort.

Bezeichnen wir demnach mit P_1, P_2, P_3 etc. die Anzahl der Permutationen von n Elementen, je 1, 2, 3 etc. zusammengenommen, so erhalten wir den vori-

gen Formeln gemäss: $P_1 = n$, $P_2 = n(n-1)$, $P_3 = n(n-1)(n-2)$, etc., und wenn sämtliche Elemente zusammengenommen werden, dann ist

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

oder, wenn man die Ordnung der Faktoren umkehrt:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n.$$

§. 124.

Die Anzahl der Permutationen von n Buchstaben, wovon p lauter a , q lauter b , r lauter c , etc. sind, ist:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q \times \text{etc.}}$$

Denn es sei N die Anzahl solcher Permutationen. Gesetzt nun, wir ändern in irgend einer von ihnen die pa 's in verschiedene Buchstaben, dann könnten diese Buchstaben auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p$ verschiedene Weisen versetzt werden, und so werden wir nun statt dieser einen Permutation, in welcher p Buchstaben lauter a 's gewesen wären, nun $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p$ verschiedene Permutationen haben. Dasselbe wäre richtig für jede der N Permutationen; wenn also die pa 's alle in verschiedene Buchstaben verwandelt wären, so würden wir insgesamt $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \times N$ verschiedene Permutationen von n Buchstaben bekommen, wovon noch q lauter b , r lauter c sind.

Ebenso, wenn hiebei die qb 's in verschiedene Buchstaben verwandelt würden, so würden wir erhalten: $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \times N$ verschiedene Permutationen von n Dingen, wovon noch r lauter c wären; und so können wir fortfahren, bis alle die n Buchstaben verschieden sind. Sobald aber diess der Fall ist, wissen wir, dass ihre ganze Zahl von Permutationen $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$. Hieraus ergibt sich:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q \times \text{etc.} \times N \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n,$$

$$\text{und } N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q \times \text{etc.}}$$

Beisp. 1. Wieviele Wechsel können mit 5 Glocken unter 8 geläutet werden? Wieviele mit dem ganzen Geläute?

$$\text{Hier ist: } P_5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720, \quad P = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ = 40320.$$

Beisp. 2. Wieviel verschiedene Worte können aus allen Buchstaben des Ausdrucks a^3b^2c gebildet werden.

Hier sind 6 Buchstaben, worunter 3 gleiche a und 2 gleiche b;
folglich:
$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2} = 60.$$

§. 125.

Die Combinationen einer Anzahl von Elementen sind die verschiedenen Versetzungen, welche mit ihnen vorgenommen werden können, ohne Rücksicht auf die Ordnung, in der sie untereinander stehen.

So sind die Combinationen von a, b, c, d, je 3 zusammen, a c b, a b d, a c d, b c d.

Es ist bereits ersichtlich, dass jede Combination ebensoviele entsprechende Permutationen ersetzen wird, als die Anzahl der Elemente, die sie enthält, Permutationen zulässt.

So ersetzt die Combination a b c die 1. 2. 3 oder 6 Versetzungen a b c, a c b, b a c, b c a, c a b, c b a.

§. 126.

Die Anzahl der Combinationen von n verschiedenen Dingen, je r zusammenge-
nommen, ist

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}. \quad \text{Denn}$$

jede Combination von r Elementen wird $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r$ Permutationen von r Elementen ersetzen; wenn daher

C^r die Zahl der Combinationen von n Elementen, r zusammengenommen, bedeutet, so haben wir
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r \times C^r = \text{Anzahl der Permutationen von } n \text{ Elementen, } r \text{ zusammengenommen}$

$$= P_r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1);$$

$$\text{folglich } C_r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}.$$

Zusatz.

$$C_1 = \frac{n}{1}, C_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, C_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc.}$$

§. 127.

Der Ausdruck für C_r (wenn wir Zähler und Nenner mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-r)$ multiplizieren) kann in die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \times (n-r) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-r)} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-r)} \\ &= \frac{n!}{r! (n-r)!}, \end{aligned}$$

wenn wir das Zeichen $n!$ wählen, um das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ anzudeuten.

Hieraus folgt, wenn wir $n-r$ statt r schreiben,

$$C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! r!} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = C_r;$$

oder: die Zahl der Combinationen von n Dingen, $n-r$ zusammengenommen, ist gleich der Zahl der Combinationen, r zusammengenommen.

Man sagt: die Combinationen aus einer dieser Elementegruppen seien Supplemente zu denen der übrigen.

Beisp. Die Zahl der Combinationen von 10 Dingen zu finden, wobei 3 und 6 zusammengenommen werden.

Hier ist $C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$, und $C_6 = C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$.

Uebungsbeispiele XLII.

1) Wieviele Wechsel können mit 5 Glocken aus sechsen geläutet werden. Wieviel mit dem ganzen Geläute?

2) Auf wieviele verschiedene Arten können 7 Personen sich bei Tisch setzen?

3) Wieviel verschiedene Worte können aus allen Buchstaben der Worte gebildet werden: catamaran, tattao, commencement, mammalia?

4) Wieviel verschiedene Worte können aus den Buchstaben des Ausdrucks $a^4b^3c^2d$ gemacht werden?

5) Wieviele Combinationen können aus 9 Dingen, 4 bei einander, gebildet werden? Wieviele, je 7 bei einander?

6) Wieviele Combinationen können aus 11 Dingen, 4 bei einander, gebildet werden? Wieviel, wenn 10 bei einander?

7) Wieviel verschiedene Gruppen von 10 Personen können aus einer Gesellschaft von 15 Freunden gebildet werden?

8) Wie oft könnte ein gewöhnlicher Würfel geworfen werden, so dass jedesmal fünf verschiedene Flächen sichtbar sind?

9) Vier Personen werden aus 10 durchs Loos gewählt; auf wieviel Arten kann diess geschehen?

10) Wie oft kann eine Wache von 6 Mann aus 60 verschiedentlich postirt werden?

Dreizehntes Kapitel.

Das Binomial-Theorem.

§. 128.

Der Binomialsatz ist eine von Isaak Newton entdeckte Formel, mittelst deren irgend eine 2theilige Grösse — ein Binom — auf irgend eine gegebene Potenz erhoben werden kann, ohne dass man das gewöhnliche Verfahren der Potenzirung vornimmt.

Er kann aufgestellt werden wie folgt:

Was auch der Werth von n sein mag, positiv oder negativ, ein Bruch oder eine ganze Zahl, so ist:

$$(a + x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} \cdot x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} x^3 + \text{etc.}$$

Man wird bemerken, dass im Obigen die Coefficienten von x , x^2 , etc., so oft n eine positive ganze Zahl ist, nichts anderes sind, als die Anzahl der Combinationen von n Dingen, je 1, 2, etc. zusammengenommen, in Anbetracht dessen wollen wir die Buchstaben C_1 , C_2 , etc. C_r benützen, um diese Coefficienten in allen Fällen zu bezeichnen; und wir können daher die Formel schreiben:

$$(a + x)^n = a^n + C_1 a^{n-1} x + C_2 a^{n-2} x^2 + \text{etc.} \\ + C_r a^{n-r} x^r + \text{etc.}$$

In diesem Ausdruck dürfen a und x für irgend welche beliebige Grössen stehen, so dass $(a-x)^n$

$$= \{a + (-x)\}^n = a^n + C_1 a^{n-1}(-x) + C_2 a^{n-2}(-x)^2 + \text{etc.} \\ = a^n - C_1 a^{n-1} x + C_2 a^{n-2} x^2 - \text{etc.},$$

mit seinen abwechselungsweise positiven und negativen Gliedern,

$$\text{und } (1 \pm x)^n = 1 \pm C_1 x + C_2 x^2 \pm C_3 x^3 + C_4 x^4 \pm \text{etc.}$$

§. 129.

Den Binomialsatz zu beweisen, wenn der Exponent eine positive ganze Zahl ist.

Durch wirklich ausgeführte Multiplikation werden wir finden, dass

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \\ (x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc.$$

Nehmen wir an, dieses Bildungsgesetz gelte für $n-1$ Faktoren, so dass

$$(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_{n-1}) = x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + p_2 x^{n-3} + \text{etc.} \\ + \dots + p_{n-1},$$

wo $p_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \text{etc.}$; $p_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + \text{etc.}$;
etc. = etc.

$$p_{n-1} = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1};$$

so erhalten wir durch Multiplikation mit einem andern Faktor $x + a_n$

$$\begin{aligned} (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) \\ = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \text{etc.} + p_{n-1} x \\ + a_n x^{n-1} + p_1 a_n x^{n-2} + \text{etc.} + p_{n-2} a_n x + p_{n-1} a_n \\ \hline = x^n + q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \text{etc.} + q_{n-1} x + q_n \end{aligned}$$

wenn $q_1 = p_1 + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \text{etc.} + a_n$,

$$q_2 = p_2 + p_1 a_n = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + \text{etc.} + a_1 a_n + a_2 a_n + \text{etc.}$$

etc. = etc.

$$q_n = p_{n-1} a_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n.$$

Hieraus folgt, dass, wenn das Gesetz für das Produkt von $n-1$ Faktoren gilt, es auch für das von n Faktoren gilt: wir haben aber oben gesehen, dass es für drei Faktoren Stich hält, also gilt es auch für vier, und folglich für fünf, u. s. w.; d. h. es gilt allgemein, wenn n eine positive ganze Zuflucht.

Es ist nun leicht einzusehen, dass die Glieder mit q_1, q_2, q_3 etc. die verschiedenen Combinationen der n Buchstaben $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}, a_n$, je einen, zwei, drei, etc. zusammengenommen, sind; und die Anzahl der Glieder in q_1 ist daher C_1 , bei q_2 ist sie C_2 , etc., wie in §. 126. Wir wollen nun a für jedes der $a_1, a_2, \text{etc.}$ setzen: dann wird die erste Seite der Gleichung $(x+a)^n$, und jedes der Glieder mit q_1, q_2, q_3 etc. wird a, a^2, a^3 etc. beziehungsweise; und wir haben desshalb

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= x^n + C_1 a x^{n-1} + C_2 a^2 x^{n-2} + \text{etc.} \\ &= x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Und natürlich wird auf dieselbe Weise folgen, dass

$$\begin{aligned} (a+x)^n &= a^n + C_1 x a^{n-1} + C_2 x^2 a^{n-2} + \text{etc.} \\ &= a^n + C_1 a^{n-1} x + C_2 a^{n-2} x^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Zusatz I. Es werden $n+1$ Glieder in der Entwicklung von $(a+x)^n$ vorhanden sein (wenn n eine positive ganze Zahl ist, diese enthalten beziehungsweise die Faktoren $a^n, a^{n-1}x, a^{n-2}x^2, \dots, a^2x^{n-2}, ax^{n-1}, x^n$).

Zusatz II. Die Coefficienten der Glieder, welche gleich weit vom Anfang und Ende abstehen, werden dieselben sein; denn nach §. 127 ist $C^r = C_{n-r}$, d. h. der Coefficient von $a^{n-r}x^r$ wird derselbe sein, wie der von $a^r x^{n-r}$.

NB. Die Anzahl der Glieder, $n + 1$, ist ungerade oder gerade je nachdem n gerade oder ungerade ist. Wenn nun n gerade ist, so ist Ein mittleres Glied, wenn aber ungerade, so sind zwei mittlere Glieder vorhanden, welche nach §. 127 gleiche Coefficienten haben, und auf beiden Seiten von ihnen werden die nemlichen Coefficienten der Ordnung nach auftreten. Sobald wir daher bei der Entwicklung eines Binoms mit einem positiven ganzen Exponenten das mittlere Glied oder die mittleren Glieder begegnet haben, so werden wir finden, dass alle Coefficienten sich selbst wiederholen; anstatt dass wir die Coefficienten der übrigen Glieder berechnen, können wir, in umgekehrter Ordnung, die bereits gefundenen Coefficienten niederschreiben, wie in den folgenden Beispielen.

Beispiel 1.

$$(1 + x)^4 = 1 + \frac{4}{1}x + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}x^2 + \text{etc.} = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Wir werden jedoch keine weiteren Beispiele über 3te, 4te und 5te Potenzen eines Binoms geben, diese sollte der Schüler nach §. 42 niederschreiben können.

Beispiel 2.

$$\begin{aligned} (1 - x)^7 &= 1 - \frac{7}{1}x + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.} \\ &= 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7. \end{aligned}$$

Uebungsbeispiele XLIII.

Mittelst der Binomialreihe zu entwickeln:

- | | | |
|-------------------|---------------------|-------------------|
| 1) $(1 + x)^6$. | 2) $(a + x)^7$. | 3) $(1 - x)^8$. |
| 4) $(1 - 2x)^6$. | 5) $(a - 3x)^5$. | 6) $(1 + 2x)^7$. |
| 7) $(2x + a)^8$. | 8) $(1 - x)^{10}$. | |

§. 135.

Die Anwendung des Satzes auf die Entwicklung der Binome, mit negativen und gebrochenen Exponenten, ist einfach genug. Da aber der Beweis zu einigen Weitläufigkeiten führt, muss er hier ausgelassen werden.

Die Reihe wird in allen diesen Fällen ins Unendliche verlaufen.

Negative Exponenten.

$$\begin{aligned}
 &\text{Beisp. 1. } (1+x)^{-2} \\
 &= 1 + \frac{-2}{1}x + \frac{(-2)(-2-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.} \\
 &= 1 - \frac{2}{1}x + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.} \\
 &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel entsteht einige Mühe, im Vereinfachen der Coefficienten und im Entfernen der überflüssigen Vorzeichen: um diess zu vermeiden, wird es von Vortheil sein, das Resultat des folgenden allgemeinen Beispiels sich einzuprägen.

$$\begin{aligned}
 &\text{Beisp. 2. } (1 \pm x)^{-n} \\
 &= 1 \pm \frac{-n}{1}x + \frac{-n(-n-1)}{1 \cdot 2}x^2 \pm \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.} \\
 &= 1 \mp \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^2 \mp \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Beisp. 3. } (1+x)^{-3} \\
 &= 1 - \frac{3}{1}x + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.} \\
 &= 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Uebungsbeispiele XLIV.

Nach der Binomialreihe zu entwickeln:

$$\begin{array}{lll}
 1. (1-x)^{-1} & 2. (1-2x)^{-1} & 3. (1-x)^{-2} \\
 4. (1+3x)^{-2} & 5. (1+2x)^{-3} & 6. (1-3x)^{-3}
 \end{array}$$

Gebrochene Exponenten.

$$\begin{aligned}
 &\text{Beisp. 1. } (1+x)^{\frac{1}{2}} \\
 &= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.} \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2}x^2 + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3}x^3 - \text{etc.}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \text{etc.}$$

Hier merke man sich die folgenden allgemeinen Resultate.

Beisp. 2. $(1 \pm x)^{\frac{p}{q}}$

$$= 1 \pm \frac{p}{q}x + \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)(\frac{p}{q}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.}$$

$$= 1 \pm \frac{p}{q}x + \frac{\frac{p}{q} \cdot \frac{p-q}{q}}{1 \cdot 2}x^2 \pm \frac{\frac{p}{q} \cdot \frac{p-q}{q} \cdot \frac{p-2q}{q}}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.}$$

$$= 1 \pm \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{1 \cdot 2 \cdot q^2}x^2 \pm \frac{p(p-q)(p-2q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot q^3}x^3 + \text{etc.} \quad (2)$$

Ebenso ist auch:

$$(1 \pm x)^{-\frac{p}{q}}$$

$$= 1 \mp \frac{p}{q}x + \frac{p(p+q)}{1 \cdot 2 \cdot q^2}x^2 \mp \frac{p(p+q)(p+2q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot q^3}x^3 + \text{etc.} \quad (3)$$

Beisp. 3. $(1 - x)^{-\frac{2}{3}}$

$$= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3^2}x^2 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^3}x^3 + \text{etc.}$$

$$= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}x^2 + \frac{40}{81}x^3 \text{ etc.}$$

Uebungsbeispiele XLV.

Entwickle auf 5 Glieder nach der Binomialreihe:

1) $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$	2) $(1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$	3) $(1 - x)^{-\frac{3}{2}}$
4) $(1 + x)^{\frac{3}{2}}$	5) $(1 - 3x)^{-\frac{3}{2}}$	6) $\sqrt[3]{1 - x}$

Bemerk. Drücke das letzte Beispiel aus in der Form $(1-x)^{-\frac{1}{3}}$.

§. 131.

Die folgenden Beispiele werden die Art und Weise zeigen, Binome mit negativen oder gebrochenen Ex-

ponenten zu behandeln, wenn das erste Glied des Binoms nicht die Einheit ist.

$$\begin{aligned} \text{Beisp. 1. } (a + 2x)^{-4} \\ = a^{-4} \left(1 + \frac{2x}{a}\right)^{-4} = a^{-4} \left\{1 - \frac{4}{1} \left(\frac{2x}{a}\right) + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \left(\frac{2x}{a}\right)^2 - \text{etc.}\right\} \\ = a^{-4} - 8 a^{-5} x + 40 a^{-6} x^2 - 160 a^{-7} x^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beisp. 2. } (a - 2x)^{-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2x}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ = a^{-\frac{3}{2}} \left\{1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2x}{a}\right) + \frac{15}{8} \left(\frac{2x}{a}\right)^2 + \text{etc.}\right\} \\ = a^{-\frac{3}{2}} + 3 a^{-\frac{5}{2}} x + \frac{15}{2} a^{-\frac{7}{2}} x^2 + \frac{35}{2} a^{-\frac{9}{2}} x^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Uebungsbeispiele XLVI.

Auf 5 Stellen nach dem binomischen Lehrsatz zu entwickeln.

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------|
| 1) $(a - bx)^{-1}$ | 2) $\sqrt[4]{a + 4x}$ | 3) $(2 - x)^{-2}$ | 4) $(3 - x)^{-3}$ |
| 5) $\sqrt[3]{a - 3x}$ | 6) $(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{4}}$ | 7) $(ax - x^2)^{-\frac{3}{5}}$ | |
| 8) $(a^2 - 2ab)^{-\frac{3}{2}}$ | 9) $(2a - 3x)^{-2}$ | 10) $(a^2 - ax)^{-\frac{1}{2}}$ | |

* Vierzehntes Kapitel. *

Die Zahlensysteme und die einzelnen Zahlengeschäfte beidenselben; Dezimalbrüche, Interessen etc.

§. 132.

Notation ist das Verfahren, die Zahlen mittelst einer Reihe von Potenzen irgend einer bestimmten Zahl darzustellen. Letztere heisst die Wurzel oder Grundzahl (Basis) des Zahlensystems, in welchem die verschiedenen Zahlen ausgedrückt werden.

So werden in der niedern Arithmetik alle Zahlen in einem System ausgedrückt, dessen Basis 10 ist; denn 3578 bedeutet $3000 + 500 + 70 + 8$, d. h.: $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8$; desgleichen wird 376, wenn es in einem System mit der Basis 12 ausgedrückt ist, geschrieben: 274, indem $2 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12 + 4 = 258 + 84 + 4 = 376$.

§ 133.

Ist r eine beliebige ganze Zahl, so kann jede beliebige Zahl N in der Form ausgedrückt werden

$$N = p_n r^n + p_{n-1} r^{n-1} + \text{etc.} + p_2 r^2 + p_1 r + p_0,$$
 wo die Coefficienten $p_n, p_{n-1}, \text{etc.}$ durchweg ganze Zahlen sind, jedoch kleiner als r .

Denn dividirt man N durch die in ihr enthaltene höchste Potenz von r , diess sei etwa r^n , wobei der Quotient p_n (welcher offenbar $< r$ sein wird) und der Rest N_1 herauskommen möge, so ist

$$N = p_n r^n + N_1.$$

Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass $N_1 = p_{n-1} r^{n-1} + N_2$, $N_2 = p_{n-2} r^{n-2} + N_3$, etc., und so wird die Entwicklung verlaufen, bis ein Rest $< r$ kommt; würde dieser p_0 geheissen, so ergibt sich:

$$N = p_n r^n + p_{n-1} r^{n-1} + p_{n-2} r^{n-2} + \text{etc.} + p_2 r^2 + p_1 r + p_0.$$

Im Fall auch einige der Coefficienten $p_0, p_1, p_2, \text{etc.}$ verschwinden, so kann doch keiner $> r$ sein. Ihre Werthe können daher zwischen 0 bis $r-1$ fallen, und diese verschiedenen Werthe heissen die Ziffern des betreffenden Zahlensystems. Es werden demnach, mit Inbegriff von Null, r Ziffern in dem „ r -System“ auftreten.

So werden im 12er-System die Ziffern sein 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, t und e, wobei t und e zur Andeutung der Ziffern 10 und 11 dienen.

§ 134.

Im dyadischen (oder Zweier-) System ist die Basis 2; im triadischen 3; im tetradischen 4;

im pentadischen 5; im hexadischen 6; etc.; im decadischen (oder Zehner-) System 10; im undecadischen 11; im duodecadischen (oder Zwölfer-) System 12; etc.

Von allen Zahlen ist, wofern nicht das Gegentheil angegeben ist, stillschweigend vorausgeschickt, dass sie im gewöhnlichen oder decadischen System ausgedrückt sind.

§ 135.

Irgend eine vorgelegte Zahl in einem gegebenen System auszudrücken.

Die gegebene Zahl möge N heissen, die im r -System ausgedrückt werden soll, in der Form

$$N = p_n r^n + \text{etc.} + p_2 r^2 + p_1 r + p_0$$

Wir haben nun darzuthun, wie die Ziffern p^n , p_{n-2} etc., gefunden werden können.

Man dividire N durch r , und es ergibt sich:

$$\frac{N}{r} = p_n r^{n-1} + \text{etc.} + p_2 r + p_1 + \frac{p_0}{r}.$$

d. h. wir werden eine ganze Zahl $p_n r^{n-1} + \text{etc.} + p_1$ als Quotienten (dieser heisse N_1), nebst einem Reste p_0 erhalten; mithin ist der, beim Dividiren von N durch r , erhaltene Rest p_0 die letzte der Ziffern.

Ferner dividire man N_1 durch r , so werden wir erhalten: $\frac{N_1}{r} = p_n r^{n-2} + \text{etc.} + p_2 + \frac{p_1}{r} = N_2 + \frac{p_1}{r}$; folglich ist der, beim Dividiren von N_1 durch r gewonnene Rest p_1 die vorletzte der Ziffern; und ebenso erhalten wir, beim Dividiren von N_2 durch r ein p_2 , etc.

Beispiel. Die gemeine Zahl 3700 im pentad. (Fünfer-) System auszudrücken, und 37704 aus dem nonad. (Neuner-) in das octad. (Achter-) System umzuwandeln.

Beisp. 1.

$$\begin{array}{r}
 5) \ 3700 \\
 \hline
 5) \ 740 \dots 0 \\
 \hline
 5) \ 148 \dots 0 \\
 \hline
 5) \ 29 \dots 3 \\
 \hline
 5) \ 5 \dots 4 \\
 \hline
 1 \dots 0
 \end{array}$$

Antwort: 104300.

Beisp. 2.

$$\begin{array}{r}
 8) \ 37704 \\
 \hline
 8) \ 4311 \dots 5 \\
 \hline
 8) \ 480 \dots 1 \\
 \hline
 8) \ 54 \dots 4 \\
 \hline
 8) \ 6 \dots 1
 \end{array}$$

Antw.: 61415.

Man erwäge, dass in Beisp. 2. die Basis 9 ist, und wir daher beim Beginn der Division genöthigt sind, die beiden Ziffern 37 zu nehmen; diese bedeuten aber nicht sieben und dreissig, sondern $3 \cdot 9 + 7 =$ vier und dreissig, daher wird auch 8 in 37 4mal gehen, mit dem Reste 2; 8 in 27 (nicht sieben und zwanzig, sondern $2 \cdot 9 + 7 =$ fünf und zwanzig) wird 3mal gehen, und 1 bleibt im Rest; u. s. w.

Uebungsbeispiele. XLVII.

- 1) Drücke 1828; 34705 im heptadischen (Siebener-) System aus.
- 2) Drücke 300 im 2-, 3-, 4-, 5-, 6-er System aus.
- 3) Drücke 10000 im 7-, 8-, 9-, 11-, 12-er System aus.
- 4) Verwandle 444 und 4321 aus dem 5er-, in das 7-er System.
- 5) Verwandle 27t und 7007 aus dem 11-er in das 8-er System.
- 6) Verwandle 123 und 10000 aus dem 9-er in das 4-er System.

§. 136.

Die gewöhnlichen arithmetischen Zahlengeschäfte werden hiebei durchgeführt, wie bei gemeinen Zahlen; nur merke man: wenn wir finden sollen, welche Zahl bei der Addition, Subtraction, etc. („im Kopf) zu behalten“ ist, so müssen wir nicht durch 10, sondern durch die Basis des fraglichen Systems dividiren.

Addition.

Beisp. 1.)

$r = 4$	$r = 7$
32123	65432
21003	54321
33012	43210
22033	1444
31102	65001
332011	326041

Subtraction.

$r = 3$	$r = 12$
2·01·2·1·0	7·t·3·48
1 02 2 2 1	5 e 6 t 4
21 2 1 2	1 t 8 6 4

Beisp. 2.) Multipliziere mit einander 68 und 71 im Elfersystem; auch drücke diese Zahlen aus und multipliziere sie im Neunersystem, und vergleiche die Resultate, indem man jedes ins andere System zurückführt.

Nun ist 68 und 71 im Elfersystem = 82 und 86 im Neunersystem.

68	82	9) 4378	11) 7823
71	86	9) 533 . . . 3	11) 642 . . . 8
68	543	9) 65 . . . 2	11) 52 . . . 7
431	727	9) 7 . . . 8	11) 4 . . . 3
4378	7823		

Durch die zwei letzten Operationen haben wir offenbar erwiesen, dass 4378 im Elfersystem = 7823 im Neunersystem ist, und umgekehrt, wie es sein sollte.

Beisp. 3.) Dividire im Fünfersystem 234431 durch 414, und ziehe die Quadratwurzel aus 122112 im Sechzersystem,

414) 234431 (310

2302

42·3

41 4

41

 $\sqrt{12|21|12|(252}$

4

45) 421

401

542) 2·0·1·2

1 5 2 4

4 4

Diesmal haben wir in beiden Fällen einen Rest.

Uebungsbeispiele XLVIII.

1) Nimm 6 Glieder der Reihe 1,10,10², etc., drücke sie im hexad. System aus und addire sie, und führe das Resultat ins decad. System zurück.

2) Multiplizire die gewöhnlichen Zahlen 64 und 33 im dyad. und im tetrad. System, und verwandle jedes Resultat ins andere System.

3) Forme 1756 und 345 aus dem Achtersystem ins Neunersystem um; multiplizire sie in beiden Systemen, und dividire das Resultat in jedem einzelnen Falle durch die erste der zwei Zahlen.

4) Dividire 51117344 durch 675 (Achtersystem), 37542627 durch 42t (Elfersystem), und 29t96580 durch 2tt9 (Zwölfersystem).

5) Ziehe die Quadratwurzeln aus 25400544 (Sechsersystem), 47610370 (Neunersystem), und 32e75721 (Duodecad.).

6) Schreibe in gemeinen Zahlen die grösste und die kleinste vierziffrige Zahl, je aus dem 6-, 7-, 8-er Systeme.

§. 137.

Ein Dezimalbruch kann als ein gemeiner Bruch betrachtet werden, dessen Nenner eine bestimmte Potenz von 10 ist. Es werden durch ein Komma genau so viele Dezimalstellen rechts abgeschnitten, als der Exponent des Nenners angibt. Wenn daher P die Ziffern bedeutet oder die sogenannte Bruchstelle eines Dezimalbruchs von p Stellen, so ist dessen gleichgeltender gemeiner Bruch

$$N = \frac{P}{10^p}.$$

Offenbar können Dezimalbrüche, welche dieselbe Bruchstelle P haben, sehr im Werthe differiren, in Folge der Veränderung im Werthe von p, d. h. in der Stellung ihres Dezimal-Komma's.

$$\text{So ist } 1,23 = \frac{123}{10^2}; 0,0123 = \frac{123}{10^4}; 12,3 = \frac{123}{10}.$$

§. 138.

Die Regel fürs Abschneiden des Komma's bei der Multiplikation der Dezimalbrüche zu beweisen.

Es seien M und N die zwei Brüche, welche als

Dezimalzahlen geschrieben, die Bruchstellen P und Q geben, mit beziehungsweise p und q Ziffern, dann ist

$$M = \frac{P}{10^p}, N = \frac{Q}{10^q}, \text{ und}$$

$$M \cdot N = \frac{P}{10^p} \times \frac{Q}{10^q} = \frac{PQ}{10^{p+q}}.$$

Nun bedeutet $\frac{PQ}{10^{p+q}}$ einen Dezimalbruch, dessen Bruchstelle PQ ist (das Produkt der 2 Dezimalen als ganzer Zahlen), und welcher $p + q$ Dezimalstellen hat; hieraus ergibt sich die Regel:

Multiplizire wie bei ganzen Zahlen, und im Produkt schneide von rechts nach links soviele Dezimalstellen ab, als im Multiplikator und Multiplikand zusammen Stellen vorhanden sind.

§. 139.

Die Regel für's Abschneiden bei der Division der Dezimalbrüche zu beweisen.

Es bedeute M, N, P, Q, p, q dasselbe wie zuvor; dann ist

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{10^p} : \frac{Q}{10^q} = \frac{P}{10^p} \times \frac{10^q}{Q} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{10^q}{10^p}, \text{ folglich:}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{1}{10^{p-q}}, \text{ oder } = \frac{P}{Q}, \text{ oder } = \frac{P}{Q} \cdot 10^{q-p};$$

je nachdem $p >, =, < q$ ist.

Nun wird $\frac{P}{Q}$ durch Division von P durch Q wie bei ganzen Zahlen erhalten; hieraus ergibt sich die Regel:

(1) Wenn die Zahl der Stellen im Dividenden die im Divisor übertrifft, schneide im

Quotienten eine jenem Ueberschusse gleiche Stellenzahl ab.

(2) Wenn die Zahl der Stellen im Dividenden dieselbe ist, wie die im Divisor, so wird der Quotient keine Dezimalstellen haben.

(3) Wenn die Zahl der Stellen im Dividenden kleiner ist, als die im Divisor, so hänge an den Quotienten eine der fehlenden Stellenzahl gleiche Anzahl Nullen an.

Man merke sich, dass beliebig viele dem Dividenden angehängte Nullen bei dem Divisionsverfahren als ebensoviele Dezimalstellen mitgerechnet werden müssen; so ist z. B.:

$$1 : 12,5 = \frac{1,000}{12,5} = 0,08.$$

§. 140.

Die Regel zu beweisen, um einen periodischen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

NB. Wir brauchen hier nur die eigentliche Bruchstelle eines periodischen Dezimalbruchs zu betrachten. Wenn etwa Zahlen vor dem Dezimalzeichen stehen, so können diese besonders genommen und vor den gemeinen Bruch, der dem andern Theil gleich ist, geschrieben werden, um so eine gemischte Zahl zu bilden.

Es sei N ein periodischer Dezimalbruch, in welchem P die nicht wiederkehrenden Ziffern, und Q die Periode oder den wiederkehrenden Theil vorstellt; und es mögen P und Q beziehungsweise p und q Ziffern enthalten, dann ist

$$N = 0, P Q Q Q \text{ etc.}, \text{ und } 10^p \cdot N = P, Q Q Q \text{ etc.}$$

$$\text{und } 10^{p+q} \cdot N = P Q, Q Q Q \text{ etc.}$$

$$\text{folglich } (10^{p+q} - 10^p) N = P Q - P,$$

$$\text{oder } N = \frac{P Q - P}{10^{p+q} - 10^p} = \frac{P Q - P}{(10^q - 1)10^p}.$$

Hieraus ergibt sich die Regel — (indem $10^q = 1$ durch q Neuner ausgedrückt sein wird, und $10^p = 1$ nebst p angehängten Nullen ist) — :

Um den Zähler zu erhalten, schreibe das Komma an das Ende der ersten Periode, und subtrahire hievon den Theil vor der Periode; um den Nenner zu erhalten: schreibe so viele Neuner, als in der Periode Ziffern enthalten sind, und hänge rechts so viele Nullen an, als Ziffern vor der Periode stehen.

§. 141.

Es bedeute $\frac{a}{b}$ einen echten Bruch in seinen kleinsten Ausdrücken.

Kann nun b in die Form $2^m 5^n$ gebracht, d. h. als Produkt irgend welcher Potenzen von 2 und 5 ausgedrückt werden, so kann der Bruch in einen endlichen Dezimalbruch verwandelt werden, in welchem die Anzahl der Ziffern gleich der grössern der beiden, m und n , sein wird.

Denn wenn $m > n$, so ist

$$\frac{a}{2^m 5^n} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{10^m}.$$

Letzterer hat, als Dezimalbruch (§. 131) ausgedrückt, m Dezimalstellen; und wenn $m < n$, so ist:

$$\frac{a}{2^m 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n},$$

welcher, als Dezimalbruch ausgedrückt, n Dezimalstellen hat.

§. 142.

Ist b nicht von der Form $2^m 5^n$, so kann der Bruch nicht in einen endlichen Dezimalbruch verwandelt wer-

den. — Denn diess Mal wird kein Faktor, mit dem wir Zähler und Nenner multiplizieren könnten, den Nenner zu einer Potenz von 10 machen, indem alle Potenzen von 10 nur die Faktoren 2 und 5 enthalten; wogegen der Nenner diessmal einen von diesen beiden verschiedenen Faktor enthält.

In solch einem Falle kann nachgewiesen werden, dass die Ziffern des Dezimalbruchs sich wiederholen, und die Anzahl der Ziffern in der Periode kleiner als b sein werden.

§. 143.

Den künftigen Werth einer gegebenen Summe, in gegebener Zeit, bei einfachen Interessen zu finden.

Es sei das Kapital in Thalern C , die Länge der Zeit in Jahren n , der Zins von 1 Thaler für 1 Jahr z ; dann werden die Zinsen von C Thalern in 1 Jahr sein Cz , und in n Jahren Czn ; diess ist der gesuchte ganze Zins, und der künftige Werth ist:

$$W = C + Czn = C(1 + zn).$$

Ist $W = 2C$, oder hat sich die ursprüngliche Summe verdoppelt, so haben wir: $2C = C(1 + zn)$,

$$\text{und } n = \frac{1}{z}; \quad z = \frac{1}{n}.$$

Zum Beispiel bei 4 $\frac{0}{100}$, da alsdann $z = \frac{4}{100}$ wäre, hätten wir $n = \frac{100}{4} = 25$; das heisst: ein gegebenes Capital wird sich in 25 Jahren verdoppeln; damit es sich aber in 15 Jahren verdopple, müssten die Interessen auf $6\frac{2}{3}\frac{0}{100}$ gesetzt werden; denn wir hätten nun $n=15$, und daher: $z = \frac{1}{15}$, und $100z = 6\frac{2}{3}$.

§. 144.

Den künftigen Werth einer gegebenen Summe, in gegebener Zeit, bei zusammengesetzten Interessen (Zinseszinsen) zu finden.

Es möge, wie zuvor, Capital und Zins mit C und n bezeichnet werden, so ist der künftige Werth Z von 1 Thaler nebst dessen 1jährigen Zinsen $Z = 1 + z$; alsdann wird CZ der künftige Werth der C Thaler nebst den 1jährigen Zinsen sein; und dieses wird nun das Capital fürs 2te Jahr: folglich wird $CZ \times Z = CZ^2$ der künftige Werth der C Thaler in 2 Jahren sein, und letzteres wird das Capital für das 3te Jahr: folglich wird $CZ^2 \cdot Z = CZ^3$ der künftige Werth der C Thaler in 3 Jahren sein etc.

Mithin ist endlich $W = CZ^n = C(1 + z)^n$ der künftige Werth der C Thaler in n Jahren:

und die Zinseszinsen $= CZ^n - C = C(Z^n - 1)$.

§. 145.

Den gegenwärtigen (baaren) Werth und den Disconto irgend welcher Summe bei einer gegebenen Zeit, (1) bei einfachen, (2) bei zusammengesetzten Interessen zu finden.

Es stelle C den baaren Werth, D den Disconto einer Summe W vor, die nach Verfluss von n Jahren zahlbar ist; alsdann bekommen wir, da C das Kapital ist, welches nebst Zinsen in der gegebenen Zeit, auf W anwachsen wird,

$$(1) W = C(1 + zn), \quad (2) W = C(1 + z)^n.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(1) C = \frac{W}{1 + zn}, \text{ und } D = W - C = \frac{Wzn}{1 + zn}$$

$$\text{und } (2) C = \frac{W}{(1 + z)^n}.$$

Beisp. 1. Welche Summe wird in 9 Monaten auf 600 Gulden anwachsen, bei 5prozentigen jährlichen einfachen Interessen.

Hier ist $W = 600$; $z = \frac{5}{100} = 0,05$; $n = \frac{3}{4} = 0,75$; um C zu finden, hat man:

$$C = \frac{W}{1 + zn} = \frac{600}{1 + 0,05 \cdot 0,75} = \frac{600}{1,0375} \\ = \text{fl. } 578. 18\frac{1}{4} \text{ kr. nahezu.}$$

Beisp. 2. In welcher Zeit werden 91 Thlr. 20 Sgr. auf 100 Thlr. anwachsen, bei $3\frac{0}{0}$ einfachen Interessen.

Hier ist $C = 91\frac{2}{3}$, $z = \frac{3}{100}$, $W = 100$; und n ist zu finden:
folglich $100 = 91\frac{2}{3} \left(1 + \frac{3n}{100}\right)$, woraus

$$n = \frac{100}{33} = 3\frac{1}{33} \text{ Jahr.}$$

Beisp. 3. Die Zinseszinsen von fl. 275. in 3 Jahren bei $5\frac{0}{0}$ zu finden.

Hier ist $C = 275$, $n = 3$, $Z = 1,05$; und W ist zu finden.
Folglich: $W = 275 \cdot (1,05)^3 = \text{fl. } 318. 20 \text{ kr. } 3\frac{1}{4} \text{ Pf.}$
und die Interessen $= W - C = \text{fl. } 43. 20 \text{ kr. } 3\frac{1}{4} \text{ Pf.}$

Ergänzung des vierten Kapitels.

I.

Die Kubikwurzel einer algebraischen Summe zu finden.

Wir wollen den Ausdruck $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ betrachten, welchen wir als den Cubus von $a + b$ kennen, und nun untersuchen, wie wir aus jenem die Wurzel erhalten können.

$$\begin{array}{r} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \underline{a^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3a^2) \quad 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \underline{3a^2b + 3ab^2 + b^3} \end{array}$$

erhalten: wenn wir das erste Glied dieses Restes durch $3a^2$ dividieren, werden wir b erhalten, das andere Glied unserer Wurzel; und indem wir dann den Ausdruck $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ subtrahieren, wird kein Rest mehr vorhanden sein.

Wenn wir dasselbe Verfahren bei jedem andern Falle einhalten und kein Rest mehr sich zeigt, so schliessen wir, dass wir die vollständige Kubikwurzel erhalten haben.

$$\begin{array}{r} 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 \\ \underline{8x^3} \end{array} (2x + y)$$

$$\begin{array}{r} 12x^2) \quad 12x^2y + 6xy + y^3 \\ \underline{12x^2y + 6xy + y^3} \end{array}$$

für b^3 ist y^3 ; dass also der ganze Subtrahent ist $12x^2y + 6xy^2 + y^3$.

Wir können (wie in §. 43) a erhalten, indem wir die $\sqrt[3]{}$ des ersten Gliedes a^3 nehmen; durch Subtrahieren von a^3 werden wir nun einen Rest $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Hier ist der Ausdruck, welcher dem Probir-Divisor $3a^2$ entspricht, $3(2x)^2 = 12x^2$; der dem $3a^2b$ entsprechende ist $12x^2y$, der für $3ab^2$ ist $6xy^2$, und der

Beispiel.

$$\begin{array}{r} 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 \\ \underline{8x^3} \quad \dots \quad 8x^3 \\ 3a^2 \quad 12x^2 \quad \left| \quad 12x^2y + 6xy^2 + y^3 \right. \\ 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \left| \quad 12x^2y + 6xy^2 + y^3. \right. \end{array}$$

Uebungsbeispiele XLIX.

Die Kubikwurzeln zu finden:

- 1) Aus $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$.
- 2) „ $a^3 - 9a^2 + 27a - 27$.
- 3) „ $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$.
- 4) „ $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$.
- 5) „ $a^3 + 24a^2b + 192ab^2 + 512b^3$.
- 6) „ $8x^3 - 84x^2y + 294xy^2 - 343y^3$.
- 7) „ $m^3 - 12m^2nx + 48mn^2x^2 - 64n^3x^3$.
- 8) „ $a^3x^3 - 15a^2bx^3 + 75ab^2x^3 - 125b^3x^3$.

II.

Besteht die Wurzel aus mehr als zwei Gliedern, wie z. B. $a + b + c$, so können wir (ähnlich wie beim Geschäft der Quadratwurzel) zuerst $a + b$ finden, wie vorhin, und diess $= a'$ setzen: desshalb werden wir bei diesem Gang der Operation zuerst a^3 , und dann $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, nemlich zusammen $(a + b)^3$ oder a'^3 , abzuziehen haben; folglich wird, da der ganze Ausdruck

$(a + b + c)^3 = (a' + c)^3 = a'^3 + 3a'^2c + 3a'c^2 + c^3$,
 der Rest kein anderer sein, als $3a'^2c + 3a'c^2 + c^3$.
 (Es wird in der That leicht zu ersehen sein, dass der Prozess des Quadratwurzelausziehens mit diesem analog ist.) Nehmen wir also jetzt als Probirdivisor $3a'^2$, gerade wie wir zuvor $3a^2$ nahmen, so werden wir das dritte Glied in der Wurzel erhalten, und nach Subtraktion der Grösse $3a'^2c + 3a'c^2 + c^3$, werden wir keinen Rest mehr haben.

Im Allgemeinen verfährt man somit nach dem leicht zu entwickelnden Satze:

$$\begin{aligned} (a + b + c + \dots)^3 = & a^3 \\ & + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ & + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 \\ & + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3 \\ & + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

oder, wenn man $a + b = a'$, $a + b + c = a''$,
 $a + b + c + d = a'''$ setzt:

$$\begin{aligned} (a + b + c + \dots)^3 = & a^3 \\ & + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ & + 3a'^2c + 3a'c^2 + c^3 \\ & + 3a''^2d + 3a''d^2 + d^3 \\ & + \dots \end{aligned}$$

Beispiel 1.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 \quad (a + b + c)^3$$

a^3	$\dots$	a^3	$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$
$3a^2$			$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$				
$3a^2c + 3a'c^2 + c^3$	$\dots$		$3a^2 + 6ab + 4b^2$	$3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$

Beispiel 2.

$$x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 12x - 8 \quad (x^2 - x - 2)^3$$

a^3	$\dots$	x^6	$3x^4 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3$	$-6x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 12x - 8$
$3a^2$	$\dots$		$-3x^5 + 3x^4 - x^3$	$-6x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 12x - 8$
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$				
$3a^2$	$\dots$			
$3a^2c$	$\dots$			
c^3				

Uebungsbeispiele L.

Die Kubikwurzeln auszuziehen von:

- 1) $a^6 + 6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a + 1.$
- 2) $x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 112x^3 + 108x^2 - 48x + 8.$
- 3) $a^6 - 3a^5b + 6a^4b^2 - 7a^3b^3 + 6a^2b^4 - 3ab^5 + b^6.$
- 4) $x^6 - 12ax^5 + 60a^2x^4 - 160a^3x^3 + 240a^4x^2 - 192a^5x + 64a^6.$
- 5) $8x^6 + 48x^5y + 60x^4y^2 - 80x^3y^3 - 90x^2y^4 + 108xy^5 - 27y^6.$
- 6) $x^9 - 3x^8 + 6x^7 - 10x^6 + 12x^5 - 12x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 3x - 1.$
- 7) $a^3 - b^3 + c^3 - 3(a^2b - a^2c - ab^2 - ac^2 - b^2c + bc^2) - 6abc.$
- 8) $1 - 6x + 21x^2 - 56x^3 + 111x^4 - 174x^5 + 219x^6 - 204x^7 + 144x^8 - 64x^9.$

III.

Da $1 = 1^3$, $1000 = 10^3$, $1000000 = 100^3$ etc. ist, so folgt, dass die $\sqrt[3]{}$ jeder Zahl zwischen 1 und 1000, d. h. jeder ein-, zwei- oder dreiziffrigen Zahl, eine Zahl mit einer Ziffer ist; ebenso ist die $\sqrt[3]{}$ jeder Zahl zwischen 1000 und 1000000, d. h. jeder 4-, 5- oder 6-ziffrigen Zahl eine zweiziffrige Zahl etc. Setzen wir daher einen Strich links von jeder dritten Ziffer einer beliebig gegebenen Kubikzahl, indem wir von den Einsern ausgehen, so wird die Zahl der Striche genau die Zahl der Ziffern in ihrer Kubikwurzel anzeigen.

Im Falle die Wurzel eine Anzahl Dezimalstellen besitzt, so wird ihr Cubus dreimal soviel haben; und es wird somit die Anzahl der Dezimalstellen in jedem cubischen Dezimalbruch ein Vielfaches von drei sein, und die Anzahl von Dezimalstellen in der Wurzel wird ein Drittel jener Anzahl sein. Ist daher die gegebene Cubikzahl ein Dezimalbruch, dessen Stellenzahl, ein Vielfaches von drei, wie vorhin durch Setzen eines Strichs neben die Einser und dann neben jede dritte Ziffer zu beiden Seiten erhalten

wird, so deutet die Zahl der Striche links vom Komma die Anzahl der ganzen Ziffern der Wurzel, und die Zahl der Striche zur Rechten die Zahl ihrer Dezimalstellen an.

Ist die gegebene Zahl kein vollständiger Cubus, so können wir gruppieren wie vorhin (indem wir immer den ersten Strich neben die Einserziffer setzen) und wie beim Prozess des Quadratwurzel- ausziehens Nullen anhängen, so dass wir der gesuchten Wurzel um so mehr näher kommen, je mehr wir Dezimalstellen heruntersetzen.

Aus nachstehendem Beispiel ist ersichtlich, wie das Verfahren bei Zahlen dem bei algebraischen Summen übereinstimmt.

Beispiel.		
	$\sqrt[3]{80 677 568 161 }$	$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ (4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline a' \\ \hline a'' \end{array}$
$a^3 =$	64	
$3a^2 = 48)$	16 677	
$3a^2b =$	14 4	
$3ab^2 =$	1 08	
$b^3 =$	27	
$3a'^2 = 5547)$	1 170 568	
$3a'^2c =$	1 109 4	
$3a'c^2 =$	5 16	
$c^3 =$	8	
$3a''^2 = 559872)$	56 000 161	
$3a''^2d =$	55 987 2	
$3a''d^2 =$	12 96	
$d^3 =$	1	

Uebungsbeispiele LI.

Die Kubikwurzeln zu finden aus :

- 1) 9261; 12167; 15625; 32768; 103,823; 110592; 262144; 884,736.
- 2) 1481544; 1601,613; 1953125; 1259712; 2,803221; 7077888.
- 3) 12,812904; 8741816; 56,623104; 33076,161; 22425768.
- 4) 102503,232; 820025856; 264,609288; 1076890625; 2,116874304.
- 5) Auf 5 Stellen aus 2,5; 0,2; 0,01; 4.

Antworten

zu den Uebungsbeispielen.

- I. 1) 30. 2) 3. 3) 6. 4) -1.
5) 50. 6) -11. 7) 6. 8) 44.
- II. 1) 3. 2) 16. 3) 15. 4) 11.
5) 48. 6) 259. 7) 100. 8) 256.
- III. 1) 8. 2) 10. 3) 3. 4) 6.
5) 7. 6) 4. 7) 33. 8) -6.
- IV. 1) 24. 2) 2. 3) 9. 4) 6.
5) 98. 6) 80. 7) 931. 8) 85.
- V. 1) $a + b + 3c$. 2) $y + 2z + 3$.
3) $3a^2 - ac + 2c^2$. 4) $2ax + 4cz$.
5) $2xy^2 - 2y^3$. 6) $2h^2 + 2k^2 + 2l^2$.
- VI. 1) $2a - 4b + 2c$. 2) $4m^2 - 6mn + 2n^2$.
3) $4ax - by - 2cz$. 4) $-10x^2 - 10x + 10$.
5) $7a^4 - 7a^3b + 7a^2b^2 - 7ab^3 + 7b^4$.
6) $-2x^2 - 4xy + y^2 - 4xz - 3yz + 3z^2$.
- VII. 1) 0. 2) $a^2 - b^2 - c^2$. 3) $6x - 8$.
4) $x^2 - y^2 - 3z^2$. 5) $4h$. 6) $a + b + c + d$.
- VIII. 1) $(a - 2b) + (3c - d) + (2e - f)$.
 $(a - 2b + 3c) - (d - 2e + f)$.
2) $-(2b - 3c) - (d - 2e) - (f - a)$.
 $-(2b - 3c + d) + (2e - f + a)$.
3) $(3c - d) + (2e - f) + (a - 2b)$.
 $(3c - d + 2e) - (f - a + 2b)$.
4) $-(d - 2e) - (f - a) - (2b - 3c)$.
 $-(d - 2e + f) + (a - 2b + 3c)$.
5) $(2e - f) + (a - 2b) + (3c - d)$.
 $(2e - f + a) - (2b - 3c + d)$.

$$6) -(f-a)-(2b-3c)-(d-2e). \\ -(f-a+2b)+(3c-d+2e).$$

$$\text{IX. } 1) (1-m-n)x^3-(1-m+n)x^2-(1+m+n)x.$$

$$2) 2ax-2cy.$$

$$3) 2bx-2by.$$

$$4) (a-b+c)x^2-(a+b-c)x-(a-b-c).$$

$$5) -ax-(3a-2b)y. \quad 6) -(3a-6c)x-ay.$$

$$\text{X. } 1) abx^3y^4; -mnx^5; +2a^2cx^2y; ab^2c^2; +a^2bc^2; -x^3y^3.$$

$$2) x^3-x^2y+xy^2; -a^3x+a^2x^2-ax^3.$$

$$3) 2a^2+7ax+3x^2.$$

$$4) x^3+6x^2+7x-6.$$

$$5) x^3-6x^2+11x-6.$$

$$6) a^4-4ab^3+3b^4.$$

$$7) 27x^3+y^3-18xy+8.$$

$$8) a^3-b^3+c^3+3abc.$$

$$9) m^6-1.$$

$$10) x^3-8y^3-27z^3-18xyz.$$

$$\text{XI. } 1) x^2-2xy+y^2; 1+4a+4a^2; a^2-6a+9.$$

$$2) a^2-4ab+4b^2; 4+4a^2+a^4; 4a^2-12ab+9b^2.$$

$$3) a^2-4c^2; 4a^2-c^2; a^4-4b^4. \quad 4) x^4-a^4.$$

$$5) 6a^2-4ab-7b^2.$$

$$6) 6xy-2y^2.$$

$$7) 3a^2+4ax+3x^2.$$

$$8) 4a^2+x^2.$$

$$\text{XII. } 1) bc^2; +5xy^2; -5bx.$$

$$2) 3ab-2ac+3bc; -x^2y^2+7xyz^2-4z^4.$$

$$3) a+5.$$

$$4) x^2-4x+3.$$

$$5) 3x-2y.$$

$$6) 2ac-3c^2.$$

$$7) x^2-2xy+2y^2.$$

$$8) 2a^2b^2+2ab+1.$$

$$9) 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4. \quad 10) a^4-2a^3+3a^2-2a+1.$$

$$\text{XIII. } 1) a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4.$$

$$2) a^5+a^4x+a^3x^2+a^2x^3+ax^4+x^5.$$

$$3) a^5-a^4x+a^3x^2-a^2x^3+ax^4-x^5.$$

$$4) 1-x+x^2-x^3.$$

$$5) x^2+x+1.$$

$$6) x^4-x^3+x^2-x+1.$$

$$7) a^2b^2+abc+c^2. \quad 8) a^3-2a^2b+4ab^2-8b^3.$$

$$\text{XIV. } 1) 1.$$

$$2) 5.$$

$$3) 2.$$

$$4) -3.$$

$$5) 7\frac{1}{2}.$$

$$6) 1\frac{1}{4}.$$

$$7) -2.$$

$$8) 4.$$

$$9) \frac{5}{6}.$$

$$10) 3.$$

- XV. 1) 6. 2) 12. 3) 4. 4) $-1\frac{4}{7}$. 5) -9 .
 6) $\frac{1}{4}$. 7) 2. 8) 5. 9) 7. 10) 9.
 11) 9. 12) 4.

- XVI. 1) 32. 2) 60. 3) 6. 4) 8. 5) 24 und 9.
 6) 24. 7) 20 Karolin u. 40 Karolin. 8) 40 Jahre.
 9) 14 fl., 9 fl., 17 fl. 10) 15 fl. u. 10 fl. 11) 120, 104, 45.
 12) 72. 13) 15 zu 11 Groschen, 5 zu 7 Groschen.
 14) 3 fl., 7 fl., 2 fl. 15) 27 Thlr. 16) 600 Thlr., 400 Thlr.,
 300 Thlr.

- XVII. 1) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. 2) $y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16$.
 3) $z^5 - 10z^4 + 40z^3 - 80z^2 + 80z - 32$.
 4) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.
 5) $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$.
 6) $x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$.
 7) $1 - 8y + 24y^2 - 32y^3 + 16y^4$.
 8) $32z^5 - 80z^4 + 80z^3 - 40z^2 + 10z - 1$.
 9) $8m^3 - 12m^2n + 6mn^2 - n^3$.
 10) $p^4 + 12p^3q + 54p^2q^2 + 108pq^3 + 81q^4$.
 11) $243r^5 - 405r^4s + 270r^3s^2 - 90r^2s^3 + 15rs^4 - s^5$.
 12) $32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5$.

- XVIII. 1) $1 + 2x - x^2 - 2x^3 + x^4$. 2) $1 - 4x + 2x^2 + 4x^3 + x^4$.
 3) $1 - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4$.
 4) $a^6 - 2a^5 + 3a^4 - 4a^3 + 3a^2 - 2a + 1$.
 5) $4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 6x + 9$.
 6) $a^6 - 6a^5x + 15a^4x^2 - 20a^3x^3 + 15a^2x^4 - 6ax^5 + x^6$.
 7) $x^6 - 4x^5 + 8x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1$.
 8) $a^8 - 8a^7x + 28a^6x^2 - 56a^5x^3 + 70a^4x^4 - 56a^3x^5 +$
 $28a^2x^6 - 8ax^7 + x^8$.

- XIX. 1) $2a - b$. 2) $3x - y$. 3) $4a^2 + 5ab$.
 4) $5a^2bc + c^4$. 5) $1 - 2x + 3x^2$. 6) $3a^2 - 2ab + 3b^2$.

- 7) $x^2 - 4xy + 4y^2$. 8) $2x^3 - 3x^2 - x + 2$.
 9) $2m - 3$. 10) $x - 1$.
- XX. 1) 357; 842; 57,9. 2) 7,14; 1684; 115,8.
 3) 1428; 0,1085; 3255. 4) 4284; 5425; 16275.
 5) 1,732; 2,236; 0,316; 0,141.
- XXI. 1) $3x - 2$. 2) $2x + 3$. 3) $3x + 5$. 4) $8x^2 + 14x - 15$.
 5) $4x - 5$. 6) $x^2 + 2x - 3$.
- XXII. 1) $x - 1$. 2) $2(x^2 + 2x + 1)$. 3) $y - 2$. 4) $3(x + 3)$.
 5) $x^2 + y^2$. 6) $x^2 + 4x + 4$.
- XXIII. 1) $2x - 3$. 2) $2y + 1$. 3) $a - 1$. 4) $y^2 - y + 1$.
 5) $x + 3$. 6) $a^2 - 3$. 7) $x^2 - y^2$. 8) $a^2 + ab + b^2$.
- XXIV. 1) $\frac{a+y}{a}$. 2) $\frac{x}{a^2}$. 3) $\frac{2xy}{x+y}$. 4) $\frac{a(m-n)}{m(m+n)}$.
 5) $\frac{3x-2y}{5x+3y}$. 6) $\frac{3x+1}{4x^2+2x-1}$. 7) $\frac{x+y}{x-y}$.
 8) $\frac{2(x+5)}{9x^2-x-3}$. 9) $\frac{3x+4}{2x^2-5}$. 10) $\frac{3a^2+2b^2}{a(2a+3b)}$.
- XXV. 1) $\frac{a^2+x^2}{3x(a+x)}$. 2) $\frac{a^2+x^2}{3x(a-x)}$. 3) $\frac{x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}$.
 4) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}$. 5) $\frac{m+nx}{a+bx}$. 6) $\frac{m^2+a^2}{a^2(m+a)}$.
 7) $\frac{2y^3}{y^4-z^4}$. 8) $\frac{z^3}{a^2(a^2-z^2)}$.
- XXVI. 1) 6. 2) $\frac{mx}{y}$. 3) $\frac{x}{a-1}$. 4) $\frac{x(x+1)}{x-1}$.
 5) $\frac{x}{b}$. 6) 1. 7) $\frac{cz(cz-1)}{c-d}$. 8) $\frac{(x^2+b^2)(x+b)}{x-b}$.
- XXVII. 1) $\frac{3-2x}{9}$. 2) $\frac{3x}{9-2x}$. 3) $\frac{4-2x}{2x+3}$. 4) $\frac{9(2x+1)}{16}$.
 5) $\frac{15-2x}{3x-14}$. 6) $\frac{2(3x-10)}{9-2x}$. 7) $\frac{3x+4}{25}$. 8) $\frac{3-x}{6}$.
 9) $\frac{9x-1}{4x-11}$. 10) $\frac{4-3x}{3(x-1)}$.

XXVIII. 1) 8. 2) $-1\frac{3}{5}$. 3) 0. 4) $1\frac{1}{3}$. 5) $\frac{3}{5}$.

6) 1. 7) $-1\frac{4}{5}$. 8) 20. 9) 3. 10) $3\frac{3}{4}$.

XXIX. 1) 40 Stunden. 2) 6 Stunden. 3) 13. 4) 3 l. 6 s. 8 d.

5) 12. 6) 18 fl. 7) 120. 8) $3\frac{1}{3}$ Minuten. 9) 24 u. 40.

10) 36 Thlr., 24 Thlr., 18 Thlr. 11) 6 Tage jeder.

12) 2 £ 10 s. $7\frac{1}{2}$ d.

XXX. 1) $x=3, y=4$. 2) $x=5, y=2$. 3) $x=3, y=7$.

4) $x=3, y=4$. 5) $x=1, y=-2$. 6) $x=3, y=2$.

7) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$. 8) $x=60, y=40$.

9) $x=11, y=7, z=2$. 10) $x=-7, y=6, z=5$.

11) $x=2, y=3, z=4$. 12) $x=-1, y=1, z=2$.

XXXI. 1) 24 und 40. 2) 120 und 40. 3) 16 und 12. 4) 53.

5) 40 und 120. 6) 13 Karolin, $1\frac{1}{2}$ Karolin.

7) 18 s. und 12 s. 8) 300 fl. und 350 fl. 9) 30 u. 20.

10) 10, 7 u. 3. 11) 2 s, 4 s. u. 5 s. 12) 18 fl. u. 6 fl.

XXXII. 1) $x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$.

2) $ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^2 + a^{\frac{5}{3}}b$.

3) $ab^{\frac{8}{3}} + a^{\frac{5}{2}} + a^2b^{\frac{1}{3}} + ab^{\frac{2}{3}}$.

4) $a^{\frac{1}{2}}b^2 + ab^2 + a^{\frac{2}{5}}b^2 + a^{\frac{3}{2}}b^2$.

5) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b^2} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{ab^2c^3}$.

6) $\frac{c}{a^2b^2} + 2abc + \frac{3a^3}{bc^2} + ab^2c^3$.

XXXIII. 1) $ab^{-\frac{2}{3}}$. 2) $a^{\frac{1}{2}}$. 3) $a^{-\frac{1}{4}}$. 4) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}$. 5) $x^3 - y^2$.

$$6) 4 - x^2 + x^{-2}. \quad 7) a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{1}{3}} + b^{\frac{4}{3}}$$

$$8) x - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}.$$

$$9) x^3 - 4x^2 + 10 - 4x^{-2} + x^{-3}.$$

$$10) a^{\frac{3}{4}} - 2a^{\frac{1}{4}} - 2a^{-\frac{1}{4}} + a^{-\frac{3}{4}}.$$

$$\text{XXXIV. } 1) 4 \text{ oder } -2. \quad 2) -1 \text{ oder } -9. \quad 3) 20 \text{ oder } -6.$$

$$4) 7 \text{ oder } 5. \quad 5) 8 \text{ oder } -40. \quad 6) 10 \text{ od. } -110.$$

$$\text{XXXV. } 1) 1 \text{ oder } -8. \quad 2) 17 \text{ oder } -4. \quad 3) -5 \text{ oder } -20.$$

$$4) -1 \text{ od. } -12. \quad 5) 6 \text{ oder } -5\frac{2}{3}. \quad 6) 6 \text{ oder } -4\frac{1}{2}.$$

$$7) 8\frac{3}{5} \text{ oder } -10. \quad 8) 10\frac{2}{7} \text{ oder } -14.$$

$$\text{XXXVI. } 1) 2 \text{ oder } -\frac{2}{3}. \quad 2) 18 \text{ oder } 3. \quad 3) 4 \text{ oder } -1\frac{3}{4}.$$

$$4) 6 \text{ oder } \frac{1}{2}. \quad 5) \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}. \quad 6) 5 \text{ oder } 1.$$

$$7) 4 \text{ oder } -1\frac{2}{3}. \quad 8) 2 \text{ oder } -1\frac{3}{4}. \quad 9) \pm 6.$$

$$10) 1 \text{ oder } -28.$$

$$\text{XXXVII. } 1) 160 \text{ Ruthen, } 150 \text{ Ruth.} \quad 2) 23 \text{ Jahre.} \quad 3) 50 \text{ Ruth.,}$$

$$4) 14 \text{ und } 17. \quad 5) 25 \text{ Ellen und } 45 \text{ Ellen.} \quad 6) 2304.$$

$$7) 10. \quad 8) 4 \text{ Meilen per Stunde.} \quad 9) 3. \quad 10) 5 \text{ und}$$

$$4\frac{1}{2} \text{ Meilen per St.} \quad 11) 13. \quad 12) 36 \text{ u. } 48.$$

$$\text{XXXVIII. } 1) 20; 110. \quad 2) 23; 144. \quad 3) 33; 126. \quad 4) 9; 16.$$

$$5) -59; -275. \quad 6) -1; 0.$$

$$\text{XXXIX. } 1) 64; 85. \quad 2) 1280; 1705. \quad 3) 96; 189. \quad 4) -256;$$

$$-170. \quad 5) 729; 547. \quad 6) -512; -341.$$

$$\text{XL. } 1) 8. \quad 2) 1\frac{1}{2}. \quad 3) \frac{1}{5}. \quad 4) \frac{9}{10}. \quad 5) \frac{2}{3}. \quad 6) \frac{5}{7}.$$

$$\text{XLI. } 1) 10. \quad 2) 9. \quad 3) \pm 6. \quad 4) 6 \text{ oder } -2. \quad 5) 15.$$

$$6) 12, 20, 18. \quad 7) 30, 60. \quad 8) 63. \quad 9) 480 \text{ Thaler,}$$

720 Thaler, 900 Thaler. 10) 1400 Thlr., 2000 Thlr.,
720 Thlr. 11) 1400 fl., 2100 fl. 12) 79 Imi, 35 Imi.

XLII. 1) 720; 720. 2) 5040. 3) 15120; 60; 3326400; 1120.
4) 12600. 5) 126; 36. 6) 330; 11. 7) 3003. 8) 6.
9) 210. 10) 50063860.

XLIII. 1) $1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$.
2) $a^7 + 7a^6x + 21a^5x^2 + 35a^4x^3 + 35a^3x^4 + 21a^2x^5$
 $+ 7ax^6 + x^7$.
3) $1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$.
4) $1 - 12x + 60x^2 - 160x^3 + 240x^4 - 192x^5 + 64x^6$.
5) $a^6 - 18a^5x + 135a^4x^2 - 540a^3x^3 + 1215a^2x^4 -$
 $1458ax^5 + 729x^6$.
6) $1 + 14x + 84x^2 + 280x^3 + 560x^4 + 672x^5 + 448x^6$
 $+ 128x^7$.
7) $256x^8 + 1024ax^7 + 1792a^2x^6 + 1792a^3x^5 + 1120a^4x^4$
 $+ 448a^5x^3 + 112a^6x^2 + 16a^7x + a^8$.
8) $1 - 10x + 45x^2 - 120x^3 + 210x^4 - 252x^5 + 210x^6$
 $- 120x^7 + 45x^8 - 10x^9 + x^{10}$.

XLIV. 1) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.}$
2) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \text{etc.}$
3) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{etc.}$
4) $1 - 6x + 27x^2 - 108x^3 + 405x^4 - \text{etc.}$
5) $1 - 6x + 24x^2 - 80x^3 + 240x^4 - \text{etc.}$
6) $1 + 9x + 54x^2 + 270x^3 + 1215x^4 + \text{etc.}$

XLV. 1) $1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{35}{8}x^4 + \text{etc.}$
2) $1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + \text{etc.}$
3) $1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 + \text{etc.}$
4) $1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 - \text{etc.}$

$$5) 1 + 2x + 5x^2 + \frac{40}{3}x^3 + \frac{110}{3}x^4 + \text{etc.}$$

$$6) 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 + \text{etc.}$$

$$\text{XLVI. } 1) a^{-1} \left(1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4} + \text{etc.} \right)$$

$$2) a^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{x}{a} - \frac{3x^2}{2a^2} + \frac{7x^3}{2a^3} - \frac{77x^4}{8a^4} + \text{etc.} \right)$$

$$3) \frac{1}{4} \left(1 + x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{16}x^4 + \text{etc.} \right)$$

$$4) \frac{1}{27} \left(1 + x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{27}x^3 + \frac{5}{27}x^4 + \text{etc.} \right)$$

$$5) a^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} + \frac{14x^3}{3a^3} + \frac{35x^4}{3a^4} + \text{etc.} \right)$$

$$6) a^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3x^2}{4a^2} + \frac{21x^4}{32a^4} + \frac{77x^6}{128a^6} + \frac{1155x^8}{2048a^8} + \text{etc.} \right)$$

$$7) (ax)^{-\frac{3}{5}} \left(1 + \frac{3x}{5a} + \frac{12x^2}{25a^2} + \frac{104x^3}{375a^3} + \frac{234x^4}{625a^4} + \text{etc.} \right)$$

$$8) a^{-3} \left(1 + \frac{3b}{a} + \frac{15b^2}{2a^2} + \frac{35b^3}{2a^3} + \frac{315b^4}{8a^4} + \text{etc.} \right)$$

$$9) \frac{1}{4a^2} \left(1 + \frac{3x}{a} + \frac{27x^2}{4a^2} + \frac{27x^3}{2a^3} + \frac{405x^4}{16a^4} + \text{etc.} \right)$$

$$10) a^{-1} \left(1 + \frac{x}{4a} + \frac{3x^3}{128a^3} + \frac{35x^4}{2048a^4} + \text{etc.} \right)$$

$$\text{XLVII. } 1) 5221; 203116. \quad 2) 100101100; 102010; 10230; 2200; 1220. \quad 3) 41104; 23420; 14641; 7571; 5954. \\ 4) 235; 1465. \quad 5) 511; 22154. \quad 6) 1212; 1212201.$$

$$\text{XLVIII. } 1) 1 + 14 + 244 + 4344 + 114144 + 2050544 \\ = 2214223 \text{ (hexad.)} = 111111 \text{ (dekad.)}. \\ 2) 100001000000 \text{ (dyad.)} = 201000 \text{ (tetrad.)}. \\ 3) 1756 \times 345 = 701746 \text{ (octad.)}; 1337 \times 274 \\ = 381011 \text{ (nonad.)}; 345; 274. \quad 4) 57264; 95494; e7t8.$$

5) 4112, 6543, 62 te. 6) 1295, 216; 2400, 343;
4095, 512.

XLIX. 1) $x+2y$. 2) $a-3$. 3) $x+4$. 4) $2a-3b$.
5) $a+8b$. 6) $2x-7y$. 7) $m-4nx$. 8) $ax-5bx$

L. 1) a^2+2a+1 . 2) x^2-4x+2 . 3) a^2-ab+b^2 .
4) $x^2-4ax+4a^2$. 5) $2x^2+4xy-3y^2$.
6) x^3-x^2+x-1 . 7) $a-b+c$.
8) $1-2x+3x^2-4x^3$.

LI. 1) 21; 23; 25; 32; 4,7; 48; 64; 9,6.
2) 114; 11,7; 125; 108; 1,41; 192.
3) 2,34; 206; 3,84; 32,1; 282.
4) 46,8; 936; 6,42; 1025; 1,284.
5) 1,357; 0,5848; 0,2154; 1,587.

Tabelle

der vorkommenden Münzen.

(Ein Karolin	=	11 Gulden.)
Ein Gulden (fl.)	=	60 Kreuzer (kr.)
	=	20 Groschen (Gr.)
Ein Groschen	=	12 Pfennig (pf.)
Ein Thaler (Thlr.)	=	30 Silbergroschen (Sgr.)

4 Farthings (f.)	=	1 Penny (d.)
12 Pence	=	1 Shilling (s.)
20 Shillings	=	1 Pound (£.)

A Crown	=	5 Shillings.
A Sovereign	=	20 Shillings.
A Guinea	=	21 Shillings.

Druckfehler,

die man vor Gebrauch zu verbessern bittet.

-
- §. 14, Beisp. 5 unten, schreibe e statt l.
§. 15, Beisp. 1 unten, „ 6 „ b.
§. 15, Beisp. 3 unten, „ $2c^2$ statt c^2 .
§. 73. Unter: „hiebei“ 4te Reihe, schr. das st. die.
Seite 82, Zeile 3 unten rechts, schr. — 3 st. 3.
„ 88, Aufg. 4) schr. 1 Q.-Elle st. 9 Q.-Ruthen.
„ 89, Aufg. 11) schr. Quart st. Eimer.
„ 96, 3te Zeile von oben schr. die st. das.
-

Inhalts-Verzeichniss.

	Seite
Vorwort des Bearbeiters	3
Kapitel I.	
Erklärungen	7
Kapitel II.	
Addition	14
Subtraktion	15
Gebrauch der Klammern	16
Buchstaben-Coefficienten	18
Multiplikation	19
Division	22
Andeutung von Zerlegung in Faktoren	26
Kapitel III.	
Einfach(st)e Gleichungen	27
Aufgaben	32
Kapitel IV.	
Potenzirung	35
Quadrat des Polynoms	37
Radizirung	38
Eigenschaft des Irrationals	38
Von der Quadratwurzel	39
Dieselbe in Zahlen	42
Kapitel V.	
Grösstes gemeinschaftliches Mass	45
Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches	53
Kapitel VI.	
Algebraische Brüche	54
Gewisse Eigenthümlichkeiten der Brüche	62

Kapitel VII.

Einfache Gleichungen (Fortsetzung)	64
Aufgaben	66
Gleichungen mit zwei Unbekannten	69
Praktisches Verfahren	72
Gleichungen mit drei Unbekannten	74
Aufgaben	75

Kapitel VIII.

Theorie der Exponenten	77
------------------------	----

Kapitel IX.

Quadratische Gleichungen	82
Aufgaben	87

Kapitel X.

Arithmetische Progression	89
Geometrische Progression	91

Kapitel XI.

Verhältniss	95
Proportion	97
Proportionalität	101

Kapitel XII.

Permutationen	102
Combinationen	105

Kapitel XIII.

Das Binomial-Theorem	107
----------------------	-----

Kapitel XIV.

Zahlensysteme und die einzelnen Zahlengeschäfte	113
Dezimalbrüche	118
Interessen- etc. Rechnung	122

Ergänzung des IV. Kapitels.

Von der Kubikwurzel	124
Dieselbe in Zahlen	128
Antworten zu den Uebungsbeispielen	130

In demselben Verlage sind ferner erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Demus, J. A., Handbuch der direkten Steuergesetzgebung Württembergs mit kurzer steuerrechtlicher Einleitung, Vorschlägen für das definitive Grundkataster und Normalien des R. Steuerkollegiums. 2. Ausg. 8^o. broch. 24 Sgr. fl. 1. 12 fr.

Fellger, Friederike, geb. Becker, Kochbuch oder theoretisch-praktische Anweisung zur bürgerlichen und feineren Kochkunst. gr. 8^o 34½ Bog. Preis broch. 1 Thlr. 10 Sgr. 2 fl., in Weinwand geb. 1 Thlr. 18 Sgr. 2 fl. 24 fr.

Hartmann, Heinr. (Pfarrer in Steinenberg), Die evangel. Kirchenstellen Württembergs. Ein statistisches Handbuch. (Aus seinem Nachlasse herausgeb.) gr. 8^o. broch. Preis 2 Thlr. 20 Sgr. 4 fl.

Keller, M. F., Gesetz über die am 1. Mai 1862 in's Leben getretene Gewerbefreiheit für das Königreich Württemberg. Hand-Ausgabe mit Erläuterungen und Inhalts-Verzeichniß. gr. 8^o. broch. Preis 8 Sgr. 24 fr.

Meyer, J. G., Handelsgärtner in Ulm, Verfasser des rationellen Pflanzenbaues 2c., Die höchsten Erträge der Weinberge und Nebfelder. Fünf Weinbriefe an die Weingärtner und Weinbergbesitzer in Württemberg u. den weinbautreibenden Gegenden in Süddeutschland u. der Schweiz. Eine ernste Mahnung für die Einführung einer besseren u. zweckmäßigen Kultur des Weinstocks und der Anlage der Weinberge. 2 Bog. 8^o. mit 1 lith. Tafel. broch. Preis 18 fr. 5 Sgr.

Pfaff, Dr. Karl, Württembergisches Gednkbuch auf alle Tage des Jahres. Ein Handbuch für jeden Stand. gr. 8^o. broch. Preis für Württemberg 1 fl. 45 fr. (1 Thlr. 10 Sgr. 2 fl. 20 fr.)

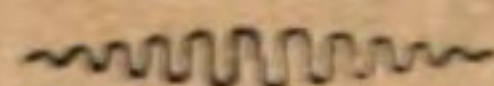
Niekler, H., Die Weinpfllege. Interessante Abhandlungen für Sachverständige und Laien. Sehr nützliche Aufklärungen nebst vorzüglichen erprobten neuen Rezepten über die Behandlung und Herstellung der Weine, Brauntweine, Obstweine und Essige, und Mittheilung der neuesten werthvollen Erfindung, keine Rahnen mehr auf dem Weine zu bekommen. 8^o. broch. 8 Sgr. 28 fr.

Thèmes de la grammaire de Monsieur **Eugène Borel**, professeur de langue française au gymnase supérieur et à l'institution royale de Cathérine à Stuttgart, traduits sur la onzième édition. 80. broch. 10 Sgr. 36 fr.

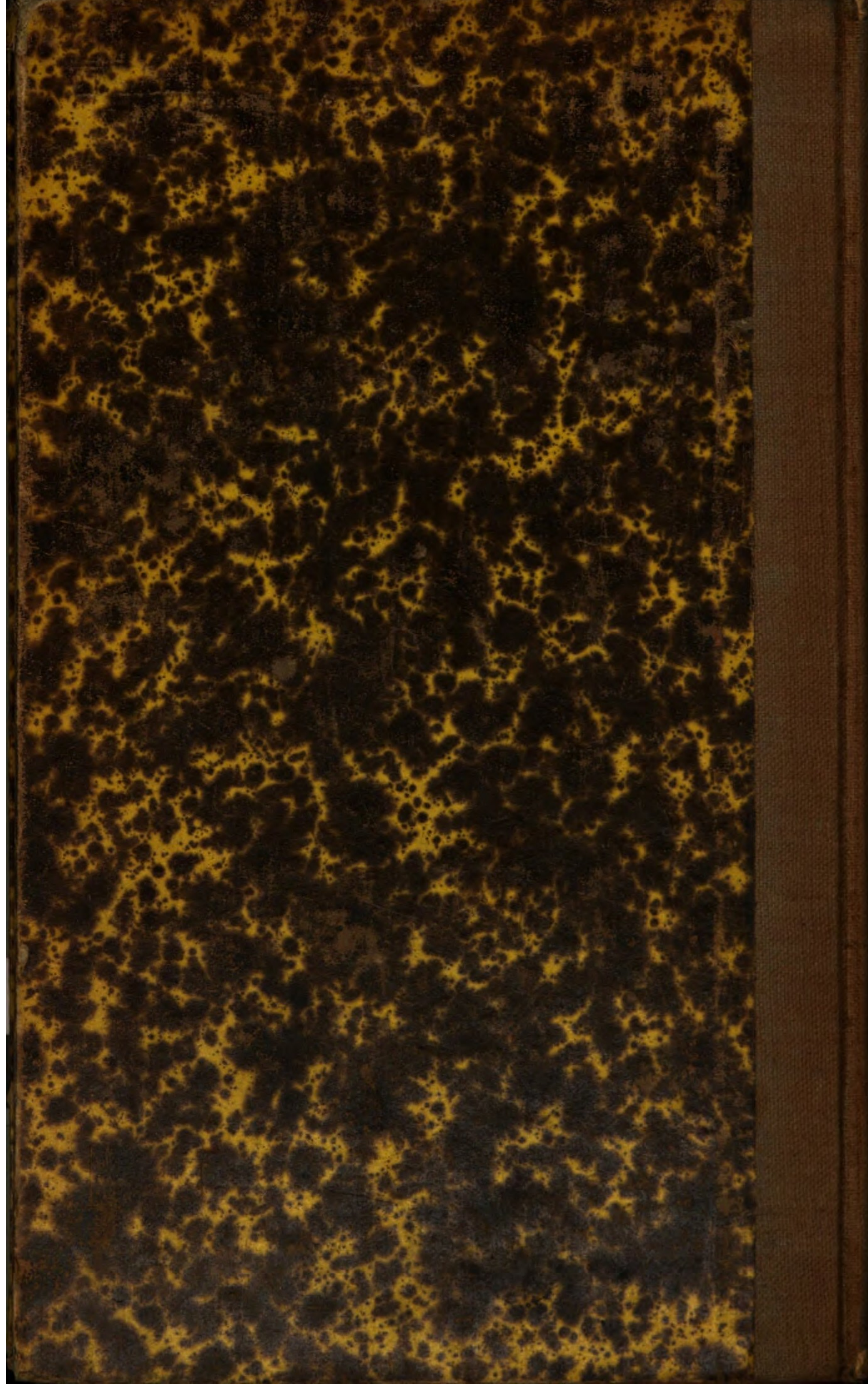
Begleiter für das Königreich Württemberg. Ein nützliches Handbuch für Geschäftsleute jeder Art. 2. Ausgabe. gr. 80. broch. 16 Sgr. 48 fr.

Württemberg wie es war und ist. Geschildert in einer Reihe vaterländischer Erzählungen, Novellen und Skizzen aus Württembergs ältesten Tagen bis auf unsere Zeit. 2te Aufl. Zweite Ausgabe. 3 Bde. 12^o. geh. 2 Thlr. fl. 3. eleg. gebunden 2 Thlr. 20 Sgr. fl. 4. 12 fr

 Dasselbe ist auch in 30 Lieferungen à 2 Sgr. 6 fr. zu beziehen.







Colenso, J. W.

Elemente der Algebra nebst mehreren hundert Aufgaben zum Gebrauch in Real-
Fortbildungs- und gewerblichen Schulen von Dr. J. W. Colenso Nach der 15
ten Auflage des englischen Originals für deutsche Unterrichtszwecke.
bearbeitet von Georg Wolpert

Stuttgart 1863

Math.p. 87 p

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081611-5